Oficina 08 – Origami Fractal

1 Introdução

A ideia de estudar a Geometria Fractal se deve ao fato de ela ser mais precisa para descrever as formas da natureza do que Geometria Euclidiana, já que esta não é capaz de descrever formas como as nuvens, as montanhas, as flores, as árvores entre outras.

A geometria dos fractais está intimamente ligada à uma ciência chamada Caos. As estruturas fragmentadas dos fractais fornecem uma certa ordem ao Caos, razão esta dos fractais chegarem a ser considerados linguagem para o Caos, pois buscam padrões dentro de um sistema que aparentemente é aleatório.

Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

- **Definição de Progressão Aritmética:**

- Progressão aritmética é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada razão da progressão aritmética (PA) e é representada pela letra r.

- **Teorema:** Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r, então:

$$\text{r } a_n = a_1 + (n-1)r \qquad (1)$$

para todo n inteiro é positivo.

Onde:

- a_n: enésimo termo
- a_1: primeiro termo
- r: razão da progressão aritmética
- n: número de termos (até a_n)

A soma dos termos de uma progressão aritmética é dada pela equação:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_2)n}{2} \qquad (2)$$

- **Definição de Progressão Geométrica:**

- Progressão geométrica é toda sequência numérica, de termos não nulos, na qual o quociente entre um termo (a partir do segundo) e seu anterior é uma constante chamada de razão q.

- **Teorema**: Em toda progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de razão q, tem-se, para todo natural *n*:

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)} \qquad (3)$$

Onde:

- an é o n-ésimo termo;
- $a1$ é o primeiro termo;
- n é o número de termos;
- q é a razão.

A soma dos termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q diferente de 1 é dada pela equação:

$$S_n = a_1 . \frac{q^{(n-1)}}{(q-1)} \qquad (4)$$

A soma dos termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão $|q| < 1$ é dada pela equação:

$$S_n = \frac{a_1}{(1-q)} \qquad (5)$$

2 Objetivo

Ao final deste experimento o acadêmico deverá ser capaz de:

→ entender conceitos como auto-semelhançageometria fractal.
→ entender os conceitos sobre progressão aritmética e progressão geométrica;
→ solidificar o conhecimento sobre fractais.

3 Material Utilizado

- Papel de tamanho A4 ou maior (para anotações)
- Régua
- Borracha
- Lápis
- Muitos pedaços de papel com 4 cm de largura e 2 cm de espessura dobrados em três partes iguais (uma folha A4 deve servir para se conseguir uns 70 pedaços).

4 Procedimento Experimental

4.1. Exemplo antes de começar a atividade prática

A medida do lado de um triângulo equilátero (Figura 01) é 10 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Vamos calcular a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

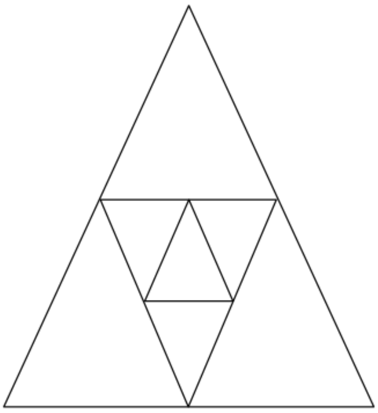


Figura 01: Triângulo equilátero fractal.

Solução:

Perímetro do primeiro triângulo → 30
Perímetro do segundo triângulo → 15
Perímetro do terceiro triângulo → 7,5

Devemos calcular a soma dos termos da *PG (30, 15, ...)* de razão *0,5*.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{30}{1-{}^{1}\!/_{2}} = \frac{30}{{}^{1}\!/_{2}} = 60$$

4.1. Tapete de Sierpinski e aplicações em PG e/ou PA

O tapete de Sierpinski é o conjunto resultante da remoção sucessiva do quadrado do centro, quando se divide um quadrado em nove quadrados iguais (Figura 02).

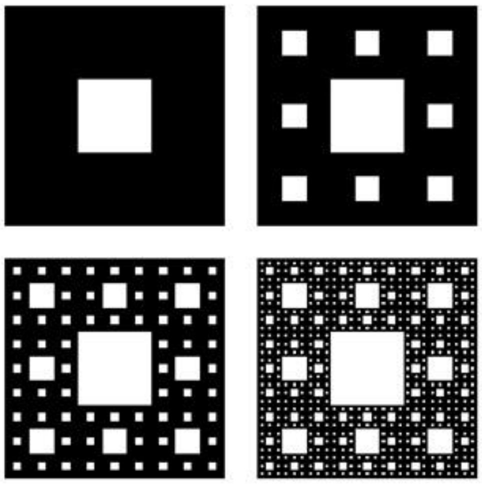


Figura 02: As quatro primeiras iterações do tapete de Sierpinski

Para montar um tapete de Sierpinski utilizaremos cubos feitos com dobradura. É uma técnica muito simples que apresenta resultados muito interessantes.

Para montar os cubos siga as instruções da imagem (Figura 03):

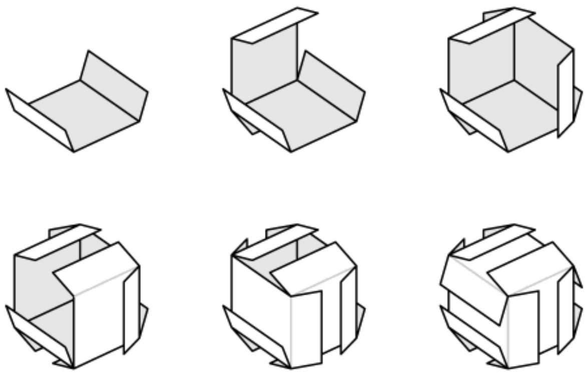


Figura 03: Como montar um cubo a partir de 6 tirinhas de papel com 4 centímetros de comprimento e 2 de largura.

1. Comece com seis tirinhas;
2. Comece juntando dois cartões.
3. A terceira tirinha é adicionada perpendicular as duas primeiras. Lembrar: as abas ficam sempre do lado de fora do cubo. Se você tem uma aba apontando para dentro, algo está errado.
4. A quarta tirinha é adicionada verticalmente. Você precisa ter cuidado para manter as quatro cartas em posição neste momento.
5. O quinto cartão vai na frente do cubo para que ele consiga manter todas as tirinhas junto. Neste ponto, o cubo está quase ficando firme. As duas cartas verticais nos lados terão uma tendência a cair para dentro, mas serão fixadas pelo sexto cartão.
6. A sexta tirinha passa horizontalmente pela parte superior do cubo. Para colocar a última tirinha corretamente você vai ter que, com cuidado, abrir as abas do topo para fora, em seguida, soltar o sexto cartão no lugar, e então, empurrar as abas de volta sobre ele.
7. Você pode adicionar mais tirinhas no exterior do cartão para dar um acabamento, ou juntar vários cubos para construir estruturas maiores.

4.3. Aplicações da Progressões:

Observe quantos cubos foram utilizados para se fazer a primeira iteração do fractal. Anote também a área da face de cada cubo e seu volume.

Preencha a tabela abaixo (Quadro 01):

Etapa	Número de Quadrados	Área da face do novo cubo	Volume Total

Quadro 01: Modelo da tabela a ser preenchida durante a realização da oficina.

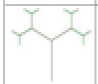
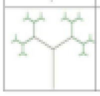
a) A sequência dada pelos dos valores da coluna “número de quadrados” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

b) A sequência dada pelos dos valores da coluna “área da face do novo cubo” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

c) A sequência dada pelos dos valores da coluna “Volume total” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

5 Atividade Complementar

Para cada coluna do quadro abaixo responda:

	Nível	Nº de novos segmentos	Nº total de segmentos	Comprimento de cada novo segmento	Comprimento total da curva
	0				
	1				
	2				
	3				
	4				

A sequência dada pelos dos valores da coluna formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

6 Referências Bibliográficas

https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CDkQFjAB&url=https%3A%2F%2Fsistemas.ufms.br%2Fsigpos%2Fportal%2Ftrabalhos%2Fdownload%2F1133%2FcursoId%3A148&ei=HO98U5LAAZHjsAT7wILYCg&usg=AFQjCNEugXxw2bu4gihziNsl2LZVKPwBEQ&sig2=ptt_9mUeWF7I94_yFE3cHw&bvm=bv.67229260,d.cWc

http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico5.php

http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html

http://nedbatchelder.com/text/cardcube.htm