Função

Antes de definirmos função, vamos utilizar alguns conceitos de conjuntos e estudar o que é produto cartesiano e relação.

Produto Cartesiano

Considere dois conjuntos A e B não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B, indicado por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), em que x pertence a A e y pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

↳ lê-se A cartesiano B ou produto cartesiano de A por B

O número de elementos de $A \times B$ é dado por $n(A) \cdot n(B)$.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{-1, 3\}$, veja como podemos representar $A \times B$ por meio de um conjunto de pares ordenados

$A \times B = \{(2, -1), (2, 3), (4, -1), (4, 3), (6, -1), (6, 3)\}$

Note que este conjunto tem 6 elementos, ou seja, $n(A) \cdot n(B) = 3 \times 2 = 6$

Relação

Dados os conjuntos A e B vazios denominados relação R de A em B qualquer subconjunto de A X B.

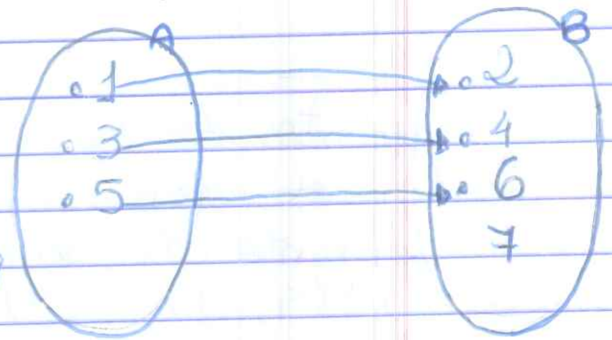
R é relação de A em B se, e somente se, $R \subset A \times B$.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 7\}$, e a relação R de A em B definidas por $y = x + 1$, sendo $x \in A$ e $y \in B$, vamos escrever os elementos da relação R.

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 ; (1, 2)$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4 ; (3, 4)$$
$$x = 5 \Rightarrow y = 5 + 1 = 6 ; (5, 6)$$
$$R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$$

Podemos representar por meio de um diagrama de flechas.



Uma relação também pode ser representada por meio de um plano Cartesiano.

Definição de função

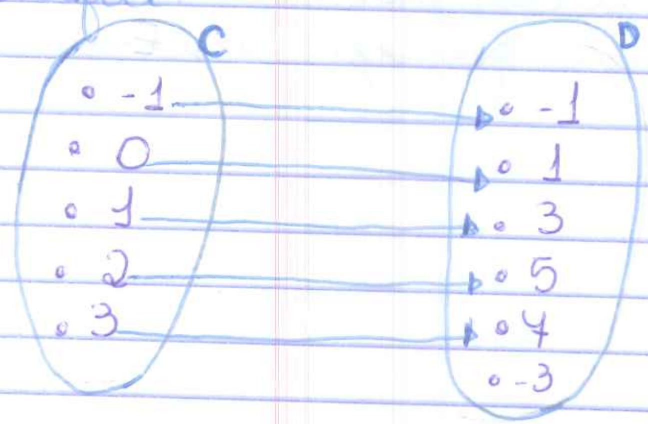
Em matemática, algumas relações tem nome especial: função

Utilizando fórmulas, conjuntos e diagramas de flechas, vamos analisar relações.

Exemplo 1

No diagrama ao lado, o conjunto A está relacionado com o B por meio da fórmula $y = 2x + 1$, sendo $x \in A$ e $y \in B$.

Observando o diagrama, podemos notar que:

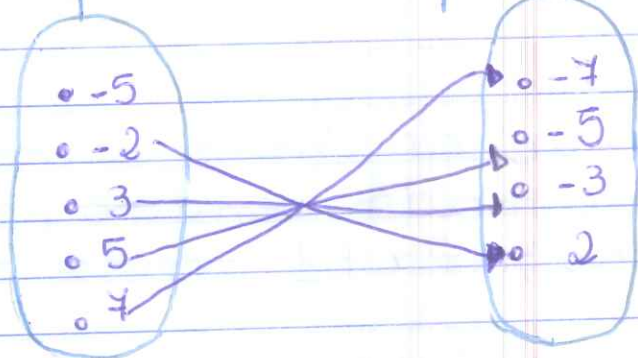


* Todos os elementos de A tem correspondente em B.
* Cada elemento de A está associado a um único de B.

Temos nesse caso uma função de A em B.

Exemplo 2

Agora, vamos relacionar os conjuntos $E = \{-5, -2, 3, 5, 7\}$ e $F = \{-7, -5, -3, 2\}$ utilizando a fórmula $-X$, com $X \in E$ e $Y \in F$.
Observando o diagrama, podemos notar que há um elemento de E que não possui correspondente em F.



Temos, neste caso, uma relação que representa uma função de E em F.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Quando escrevemos uma função $F: A \to B$, denominamos o conjunto A de domínio e o conjunto B, de contradomínio. Cada elemento $y \in B$ associado ao elemento x de A, denominamos imagem de x pela função F. Ao conjunto desses valores de y denominamos imagem da função.

D(F) lê-se domínio da função

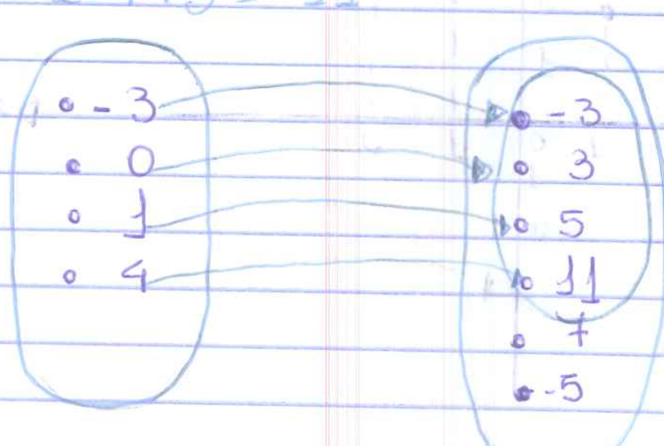
CD(F) lê-se Contradomínio da função

Im(F) lê-se imagem da função.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-3, 0, 1, 4\}$ e $B \{-5, -3, 3, 5, 7, 11\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de $F: A \to B$ definida por $2x + 3 =$

- $F(-3) = 2 \cdot (-3) + 3 = -3$
- $F(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
- $F(1) \, 2 \cdot 1 + 3 = 5$
- $F(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$



$D(F) = \{-3, 0, 1, 4\}$

$CD(F) = \{-5, -3, 3, 5, 7, 11\}$

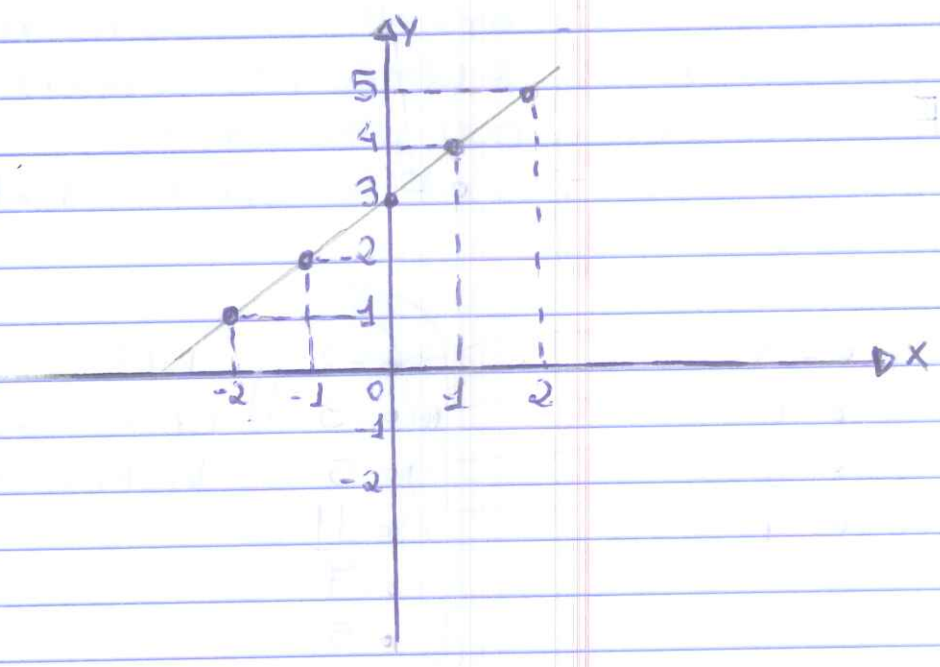
$Im(F) = \{-3, 3, 5, 11\}$

Construindo o gráfico de uma função

Para construir o gráfico de uma função F, utilizando a ideia de representação de par ordenado de números reais (a, b) em um plano Cartesiano, com $a \in D(F)$ e $b \in Im(F)$.

Vamos construir no plano Cartesiano o gráfico de uma função $F: A \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = x + 3$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

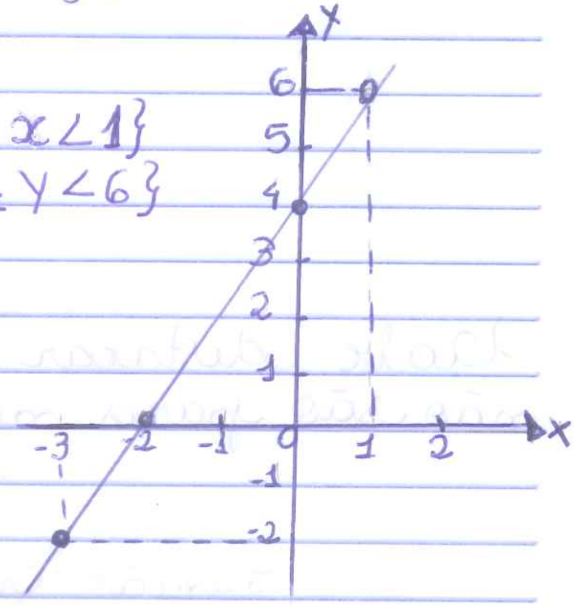
X	$F(x) = x+3$	(x, y)
-2	$F(-2) = -2+3 = 1$	$(-2, 1)$
-1	$F(-1) = -1+3 = 2$	$(-1, 2)$
0	$F(0) = 0+3 = 3$	$(0, 3)$
1	$F(1) = 1+3 = 4$	$(1, 4)$
2	$F(2) = 2+3 = 5$	$(2, 5)$



Domínio e imagem de uma função apartir do gráfico.

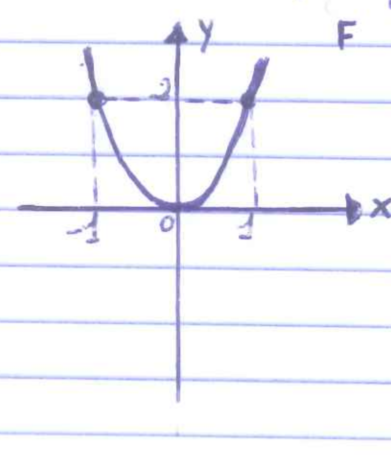
Note que o gráfico abaixo foi projetado nos eixos das abscissas e das ordenadas. A projeção no eixo X corresponde ao domínio e projeção no eixo Y ao conjunto imagem.

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$$
$$Im(F) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y < 6\}$$

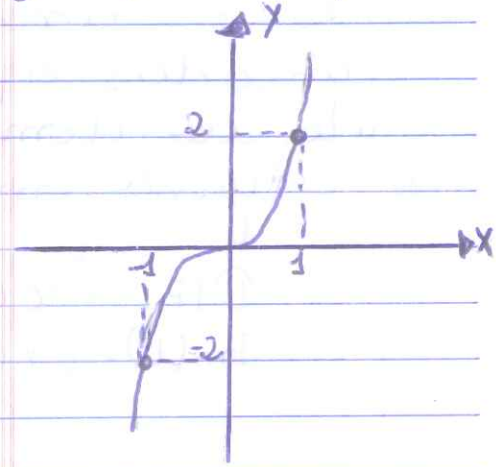


Função par e função ímpar

Note que o gráfico de F e simétrico em relação ao eixo Y. Isto ocorre para todo x do domínio $F(x) = F(-x)$. Nesse caso, dizemos que F é uma função par.



Já o gráfico de g é simétrico a origem. Isto ocorre porque para todo x do domínio, $g(x) = -g(-x)$. Neste caso dizemos que g é uma função ímpar.

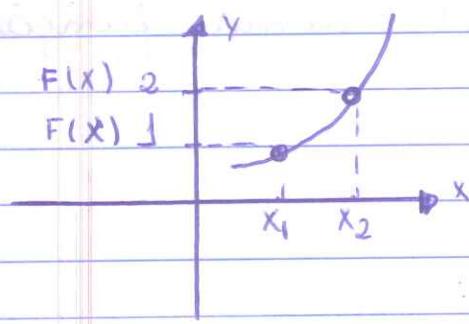


Cabe destacar que há funções que não são pares nem ímpares.

Função Crescente, decrescente e constante.

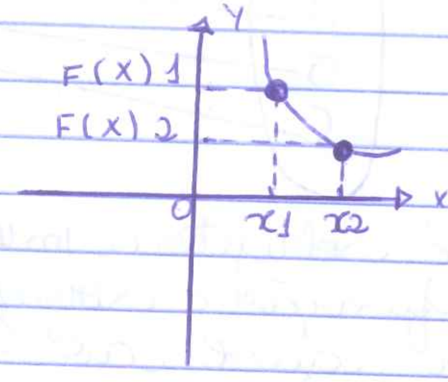
Função Crescente

Sendo x_1 e x_2 os elementos quaisquer de um conjunto $A \subset D(F)$, com $x_1 > x_2$ a função é crescente para $F(x_1) > F(x_2)$



Função decrescente

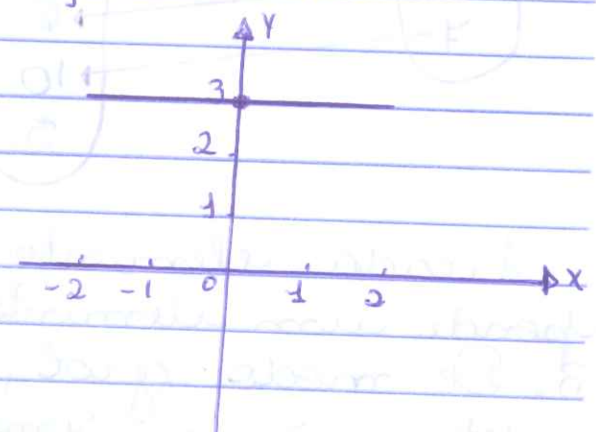
Sendo x_1 e x_2 elementos quaisquer de um conjunto $A \subset D(F)$, com $x_1 > x_2$ a função e decrescente para $F(x_1) < F(x_2)$, isso e aumentando x, diminui valor de y.



Função Constante

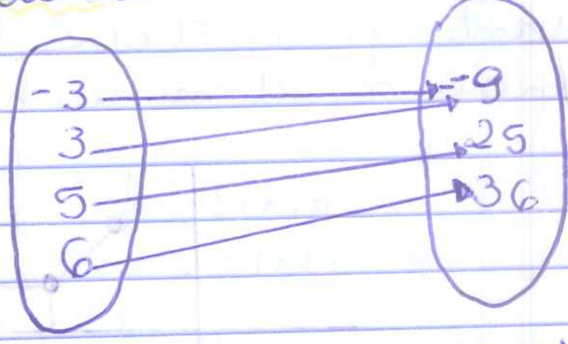
Considere a função $F(X) = 3$ representada no plano cartesiano.

Nesta função, podemos notar que a imagem e sempre 3 para qualquer X real. Portanto, ela é uma função constante.



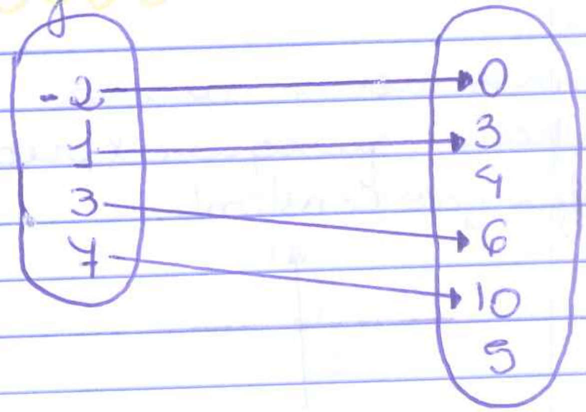
Funções Sobrejetora, Injetora e Bijetora

Sobrejetora



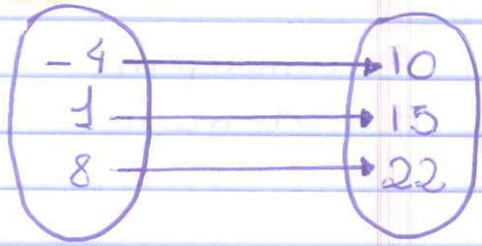
F é sobrejetora Im(F)=CD(F)
A função é sobrejetora se sua imagem for igual ao seu contradominio.

Injetora



A cada elemento do conjunto A Corresponde um elemento distinto do conjunto B. De modo geral, uma função F: AB é injetora se, e somente se, para todo YB existe um unico X A, tal que $y = F(x)$

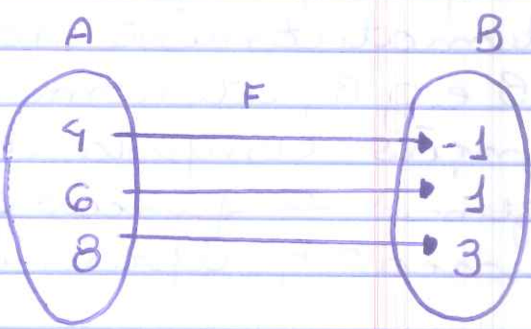
Bijetora



Todos os elementos de B são imagens únicas dos elementos de A. De modo geral a função é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

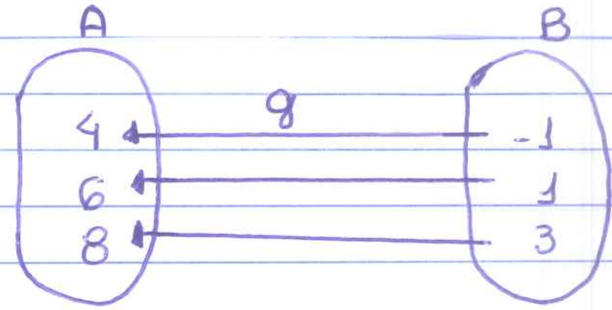
Função Inversa

Observe, no diagrama de setas abaixo, a função $F: A \to / F(X) = X - 5$ que transforma os elementos de A nos de B:



A = domínio
B = imagem

Como para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in F$, a função F é bijetora. Dessa forma é possível ter uma função $g: Y \to X$ de modo que, se $(x, y) \in F$, $(y, x) \in g$:



A= imagem
B= domínio

A condição necessária e suficiente para que uma função tenha inversa é que seja sobrejetora e injetora, ou seja bijetora. No caso, temos que g é a função inversa de F.

Função Composta

A função composta pode ser entendida pela determinação de uma terceira função C, formada pela junção das funções A e B. Matematicamente falando temos que $F: A \to B$ e $g: B$, denomina a formação da função composta de g com F, $h: A \to$ Dizemos a função g composta com a função F, representada por $g o F$

Exemplo:

A o considerarmos as funções $F(x) = 4x$ e $g(x) = x^2 + 5$, determinaremos:

S T Q Q S S D
/ /

a) $g \circ F$

$(g \circ F)(x) = g(F(x))$

$g(x) = x^2 + 5$

$g(4x) = (4x^2) + 5$

$g(4x) = 16x^2 + 5$

$(g \circ F)(x) = g(F(x)) = 16x^2 + 5$

b) $F \circ g$

$(F \circ g)(x) = F(g(x))$

$F(x) = 4x$

$F(x^2+5) = 4(x^2+5)$

$F(x^2+5) = 4x^2 + 20$

$(F \circ g)(x) = F(g(x)) = 4x^2 + 20$

___/___/___

S T Q Q S S D