__/__/__

Resumo sobre função exponencial.

Potências com expoente natural:

A potenciação equivale a uma multiplicação de fatores iguais. Observe:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ ou } 2^3 = 8$$

Note que 2^3 é a expressão concisa do produto de 3 fatores iguais a 2. Ela representa uma potência na qual o número 2 é denominado base e 3 o expoente.

A potência 2^3 é lida assim: dois elevado à terceira potência ou dois elevado ao cubo.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \text{ ou } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Aqui, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ também representa uma potência, sendo lida como: um terço elevado à segunda potência ou um terço elevado ao quadrado.

De um modo geral, sendo a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$, definimos:

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Podemos observar que os símbolos a^1 e a^0 não se encaixam na definição acima, pois não tem sentido fator em multiplicação com um só fator ou, ainda, com nenhum fator.

No entanto, é conveniente estender a definição de potência para esses dois casos de modo a preservar as propriedades das potências que recordaremos adiante. então, definimos:

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$$

Suelen Medeiros Dias

___/___/___

⇒ Potências com expoentes inteiro:

Se a é um número real não nulo ($a \neq 0$) e n um número inteiro e positivo, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ex:

* $6^{-1} = \frac{1}{6}$

* $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{64}\right)} = 64$

* $(\sqrt{3}^{-1}) = \frac{1}{(\sqrt{3}^{1})} = \frac{1}{3}$

As potências com expente inteiro gozam das seguintes propriedades operatórias:

$a^m \cdot a^n = e^{m+n}$	conserva-se a base e adicionam-se os expoentes
$a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)	conserva-se a base e subtraem-se os expoentes
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Eleva-se cada fator ao expoente dado
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)	Elevam-se o numerador e o denominador ao expoente dado.

⇒ Potências com expoente racional:

Se a é um número real positivo e $\frac{m}{n}$ um número racional, com n inteiro positivo, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Lembramos que as potências com expoente racional possuem as mesmas propriedades operatórias que as potências com expoente inteiro.

Veja como podemos calcular $8^{\frac{4}{3}}$ usando a definição anterior:

$$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$$

Poderíamos também proceder do seguinte modo:

$$8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$$

⇛ Potências com expoente irracional:

O que significa uma potência com expoente irracional, como, por exemplo $10^{\sqrt{2}}$?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar, inicialmente, aproximação racional de $\sqrt{2}$, por falta, tomando os valores 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...

Usando uma calculadora científica, obtemos:

$10^1 = 10$

$10^{1,4} = 25,11886432$

$10^{1,41} = 25,70395783$

$10^{1,414} = 25,00159563$

... ...

Observe que a sequência de valores 10^n, nos quais n assume, valores racionais que se aproximam de $\sqrt{2}$, $10^1, 10^{1,4}, 10^{1,41}, \ldots$, e $10^2, 10^{1,5}, 10^{1,42}, 10^{1,415}$, ...) aproximam-se de um número; e esse número é tomado com definição de $10^{\sqrt{2}}$.

Como as potências com espoente irracional gozam das mesma propriedades operatórias que as potências com expoente inteiro, podemos calcular, por exemplo $(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$.

Assim, $(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 10^2 = 100$

⇛ Potências com expoente real:

As potências com expoente real tem significado no conjunto dos números reais.

É preciso, porém, tomar cuidado para casos singulares como por exemplo, 0^0. Qual o valor de 0^0?

Na opinião do professor Elon lages lima, "o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada".

⇛ Equações exponenciais:

exemplo:

Uma cultura, inicialmente com 100 bactérias, reproduz-se em condições ideais. Suponha que, por divisão celular, cada bactéria dessa cultura dê origem a duas outras bactérias idênticas por hora.

a) Qual a população dessa cultura após 3 hrs do instante inicial?
b) Depois de quantas horas a população dessa cultura será de 51200 bactérias?

a) no instante inicial, temos 100 bactérias.

Uma hora depois, teremos $100 \cdot 2 = 200$ bactérias

Passada mais uma hora (após 2 hrs do instante inicial), a população será de $(100 \cdot 2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ bactérias

Passada mais uma hora (após 3 hrs do instante inicial), a população será de $(100 \cdot 2^2) \cdot 2 =$

$100 \cdot 2^3 = 800$ bactérias. E assim por diante.

Após 3hrs, teremos 800 bactérias.

b) Depois d n horas, teremos uma população P igual a $P = 100 \cdot 2^n$.

De acordo com os dados do problema, temos:

$$51200 = 100 \cdot 2^n \Rightarrow 2^n = \frac{51200}{100} \Rightarrow 2^n = 512$$

Desse modo, chegamos a uma equação exponencial, já que a incógnita n aparece no expoente.

Para resolver uma equação exponencial, devemos transforma-la de modo a obter potência de mesma base no primeiro e no segundo membro da equação dada.

Para isso, além das propriedades das potências, usaremos o seguinte fato:

Se $a > 0$, $a \neq 1$ e x é a incógnita, a única solução da equação $a^x = a^\alpha$ é α.

Então, para resolver a equação $2^n = 512$, vamos decompor 512 em fatores primos:

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$512 = 2^9 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9$

__/__/__

Como as bases são iguais, igualamos os expoentes. Daí obtemos $n = 9$ ou seja, a população da cultura será de 51200 bactérias depois de 9hrs.

⇒ Resolução de equações exponenciais com o uso de artifícios:

Para resolver determinada equações exponenciais, vamos fazer uma transformação e usar artifício.
ex: Resolva a equação: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Usando as propriedades da potenciação, vamos fazer uma transformação na equação dada:

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Fazendo $2^x = y$ temos a equação do 2º grau em y:

$y^2 - 5y + 4 = 0$

Resolvendo a equação, vem: $y = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} y' = 4 \\ y'' = 1 \end{cases}$

Finalmente, voltando à igualdade $2^x = y$, obtemos:

$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \therefore x = 2$

$2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \therefore x = 0$

$S = \{0, 2\}$

⇒ Função exponencial:

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada função exponencial de base a.

Porque a base deve ser positiva e diferente de 1? Veja o porquê.

EcoLinea

* Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real.