Aula

Nome: Joana Tatsch

Função logarítmica

Primeiramente, vamos ... ver alguns exemplos de equações exponenciais:

Vejamos, o seguinte exemplo:
A que expoente x se deve elevar o número 2 para se obter $\frac{1}{32}$?

* Pelo enunciado, temos:

$$2^x = \frac{1}{32} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \cancel{2}^x = \cancel{2}^{-5} \therefore x = -5$$

Este valor -5 encontrado para o expoente x denomina-se logaritmo do número $\frac{1}{32}$ na base 2 e se representa por $\log_2 \frac{1}{32} = -5$.

Então:

$$\boxed{\log_2 \frac{1}{32} = -5 \Leftrightarrow 2^{-5} = \frac{1}{32}}$$

Através deste exemplo, podemos notar que:

- determinar o logaritmo de um número b numa base a significa determinar o expoente x tal que $a^x = b$.
- os números b e a devem ser positivos (>0).
- $a \neq 1$.

Ou seja:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$ com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

* O logaritmo é o inverso da potenciação.

$$\begin{cases} a = \text{base da potência} \\ b = \text{potência} \\ x = \text{expoente} \end{cases}$$

Observação:

Aos logaritmos que se indicam $\log_a b$ chamamos de sistema logaritmos de base a.

Existem uma infinidade de sistemas de logaritmos. Dentre todos os sistemas, o mais importante é o sistema de logaritmos decimais, ou de base 10. Indica-se: $\log_{10} x$ ou $\log x$.

Quando o sistema é de base 10, é comum omitir-se a base na sua representação

Exemplo.

Sabendo que $\log_a 64 = 6$ calcule o valor de a.

$a^6 = 64 \iff a = \pm\sqrt[6]{64} \iff a = \pm 2$

como $a > 0$, o valor -2 não deve ser considerado.

$a = 2$

Condições de existência dos logaritmos

Para que os logaritmos sempre existam, devemos ter:

$$\log_a b \Rightarrow \begin{cases} \text{logaritmando positivo } (b > 0) \\ \text{base positiva } (a > 0) \\ \text{base} \neq 1 \end{cases}$$

A esse conjunto de condições chamamos de campo de existência ou domínio dos logaritmos.

Exemplo 1:

Determinar o domínio da função $f(x) = \log_3(x-5)$.

Indicaremos sempre as condições de existência por CE.

$CE \{ x - 5 > 0$

Como a base é 3 (positiva e diferente de 1), devemos resolver somente a condição imposta para o logaritmando, isto é:

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \}$

Exemplo 2:

Determinar o campo de existência de $y = \log_{m-2} 7$

$CE \{ m - 2 > 0$ e $m - 2 \neq 1$

$m - 2 > 0$ | $m \neq 1 + 2$

$m > 2$ | $m \neq 3$

$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid m > 2$ e $m \neq 3 \}$

Consequência da Definição

1- O logaritmo de um em qualquer base é zero

$$\boxed{\log_b 1 = 0}$$

Exemplos:

$\log_3 1 = x$

$3^x = 1$

$\cancel{3}^x = \cancel{3}^0$

$x = 0$

$\log_9 1 = x$

$9^x = 1$

$\cancel{9}^x = \cancel{9}^0$

$x = 0$

2- Quando a base e o logaritmando são iguais o resultado é igual a 1

$$\boxed{\log_b b = 1}$$

Exemplos:

$\log_5 5 = x$

$\cancel{5}^x = \cancel{5}$

$x = 1$

$\log_{10} 10 = x$

$\cancel{10}^x = \cancel{10}$

$x = 1$

3 - Sendo a base do logaritmando igual a base do logaritmo, o resultado é o expoente do logaritmando

$$\boxed{\log_b b^m = m}$$

Exemplo:

$\log_2 2^3 = x$

$\cancel{2}^x = \cancel{2}^3$

$x = 3$

$\log_5 5^2 = x$

$\cancel{5}^x = \cancel{5}^2$

$x = 2$

4 - A igualdade de dois logaritmos em uma base se verifica quando os logaritmandos são iguais

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \iff b = c}$$

Exemplo:

$\cancel{\log_2} x = \cancel{\log_2} 4$

$x = 4$

$\cancel{\log_3} x = \cancel{\log_3} 27$

$x = 27$

Equações logarítmicas

Equações logarítmicas são equações que envolvem logaritmos.

Para resolver uma equação logarítmica, temos:

1º) Indicaremos as condições de existência

2º) Resolveremos a equação.

3ª) Fazemos as verificação com as soluções da equação nas condições de existência

Exemplo 1:

Determinar o conjunto verdade da equação

$\log_4(x^2+3x-1) = \log_4(5x-1)$.

* Aplicar a 4ª consequência:

$\cancel{\log_4}(x^2+3x-1) = \cancel{\log_4}(5x-1)$

$$CE \begin{cases} x^2+3x-1>0 \\ e \\ 5x-1>0 \end{cases}$$

Então: $x^2+3x-1 = 5x-1$

$x^2+3x\cancel{-1}-5x\cancel{+1}=0$

$x^2 \quad x = 0$

$x(x-2)=0$

$x=0$

$x-2=0$

$x=2$

Verificação: para $x=0$

$0+0-1>0$

$-1>0$ falso

$0-1>0$

$-1>0$

para $x=2$

$2^2+3.2-1>0$

$4+6-1>0$ verdade

$9>0$

$5.2-1>0$

$9>0$

Solução $=\{2\}$

Exemplo 2:

Resolver a equação $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$

$CE \{ x>0$

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 = 0$

Se substituirmos $\log_3 x$ por y, teremos:

$y^2 - y - 6 = 0$

$y' = 3$

$y'' = -2$

Verificação: $\log_3 x = y \Rightarrow \log_3 x = 3$ ou $\log_3 x = -2$

$x = 3^3$ $\qquad x = 3^{-2}$

$x = 27$ $\qquad x = \frac{1}{9}$

Ambas as soluções satisfazem as CE.

Propriedades Operacionais dos Logaritmos

1ª) Logaritmo de um produto

$$\boxed{\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c} \qquad a > 0 \quad c > 0 \quad 1 \neq b > 0$$

2ª) Logaritmo de um quociente

$$\boxed{\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c} \qquad a > 0 \quad c > 0 \quad 1 \neq b > 0$$

3ª) Logaritmo de uma potência

$$\boxed{\log_b a^n = n \cdot \log_b a} \qquad a > 0 \quad 1 \neq b > 0$$

Caso Particular: $\boxed{\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_b a}$

Exemplo 1:
Sendo $\log_b a = 4$, $\log_b c = 6$ e $\log_b d = -1$ calcular

$\log_b\left(\frac{a \cdot c}{d}\right)$.

* Aplicando 2ª propriedada, teremos:
$\log_b a \cdot c - \log_b d$

** Agora, aplicamos a 1ª propriedade:
$\log_b a + \log_b c - \log_b d$

***substituindo pelos valores dados no enunciado no exemplo, teremos:
$4 + 6 - (-1) = 4 + 6 + 1 = 11$

Exemplo 2:
Sendo $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, calcular
a) $\log 24$
* $24 = 2^3 \cdot 3$, então temos:
$\log(2^3 . 3) = \log 2^3 + \log 3$ (usamos a 1ª propriedade)

quando temos no logaritmando um número elevado a algum expoente, este expoente pode ir para frente do logaritmo:

Então, teremos:
$3 \log 2 + \log 3 = 3 . x + y = 3x + y$

b) $\log(9\sqrt{8})$
* neste caso temos uma multiplicação, usaremos a 1ª propriedade
$\log 9 + \log \sqrt{8}$
** arrumamos estes números para que possam ter

os números 2 e 3 presentes neles:

$$\log 3^2 + \log \sqrt{2^3} = 2\log 3 + \log 2^{\frac{3}{2}} = 2\log 3 + \frac{3}{2}\log$$

*** substituindo pelos valores dados:

$$2 \cdot y + \frac{3}{2}x = \frac{4y + 3x}{2}$$

Exemplo 3:

Sabendo-se que $\log_x a = 8$, $\log_x b = 2$ e $\log_x c = 1$, calcular $\log_x\left(\frac{a^3}{b^2 \cdot c^4}\right)$.

* Primeiro vamos usar primeiro a 2ª possibilidade e logo a 1ª possibilidade:

$$\log_x a^3 - \log_x b^2 \cdot c^4 = \log_x a^3 - \log_x b^2 + \log_x c^4$$

$$3\log_x a - 2\log_x b + 4\log_x c = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 =$$
$$24 - 4 + 4 = 24$$

Exemplo 4:

Dado $\log_x A = 2 \cdot \log_x m + \log_x n$, calcular A em função de m e n.

$$\log_x A = \log_x m^2 + \log_x n$$
$$\cancel{\log_x} A = \cancel{\log_x}(m^2 + n) \quad \text{(4ª conseq. da definição)}$$
$$A = m^2 + n$$

Aplicações

Exemplo 1:

Resolver a equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$

* CE $\begin{cases} x + 2 > 0 \text{ e} \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

tilibra

$\log_2 (x+2)(x-2) = 5$ → observação: $5 = \log_2 32$

$\log_2 (x+2)(x-2) = \log_2 32$

$(x+2)(x-2) = 32$

$x^2 - 2x + 2x - 4 = 32 \Rightarrow x^2 - 4 = 32 \Rightarrow x^2 = 36$

$x = \pm 6$

Verificação:

$x+2>0$ $6+2>0$ $-6+2>0$

$8>0$ V $-4>0$ F

$x-2>0$ $6-2>0$ $-6-2>0$

$4>0$ V $-8>0$ F

Exemplo 2:

Resolver a equação $2\log_7 x = \log_7 3x + \log_7 6$

CE $\{ x>0$

* neste caso usamos a 1ª propriedade:

$2\log_7 x = \log_7 (3x \cdot 6)$

$\cancel{\log_7} x^2 = \cancel{\log_7} (3x \cdot 6)$

$x^2 = 3x \cdot 6$

$x^2 = 18x \Rightarrow x^2 - 18x = 0$

$x(x-18) = 0$

$x = 0$

$x = 18$

Verificação:

$x>0$ $0>0$ F $18>0$ (V)

Exemplo 3:

Resolver a equação $\log_2 (x-1) + 1 = \log_2 (x+2) + \log_2 (7-x) - \log_2 3$.

$$CE \begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ 7-x>0 \end{cases}$$

$\log_2(x-1) + \log_2 2 = \log_2(x+2) + \log_2(7-x) - \log_2 3$

usando a 1ª e 2ª propriedade, teremos:

$\log_2 (x-1) . 2 = \log_2 (x+2)(7-x) - \log_2 3$

$\cancel{\log_2} (x-1) . 2 = \cancel{\log_2} \frac{(x+2)(7-x)}{3}$

$$\frac{2x-2}{1} = \frac{(x+2)(7-x)}{3}$$

$6x - 6 = 7x - x^2 + 14 - 2x$

$6x - 6 = 5x - x^2 + 14$

$x^2 + x - 20 = 0$

$x' = 4$

$x'' = -5$

Verificação:	para $x = 4$	para $x = -5$
$x + 1 > 0$	$4 + 1 > 0$ (V)	$-5 + 1 > 0$ (F)
$x + 2 > 0$	$4 + 2 > 0$ (V)	$-5 + 2 > 0$ (F)
$7 - x > 0$	$7 - 4 > 0$ (V)	$7 - (-5) > 0$ (V)

Exemplo 4:

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 110 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

CE $\begin{cases} x > 0 \\ e \\ y > 0 \end{cases}$

→ isolando x

$\begin{cases} x + y = 110 \Rightarrow x = 110 - y \\ \log x . y = 3 * \end{cases}$

observação:
$\log_{10} 3 = 3$

$\begin{cases} x = 110 - y \ (1) \\ \log x . y = \log 3 \\ \quad x . y = 10^3 \Rightarrow x . y = 1000 \ (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem:

$xy = 10^3$

$(110 - y) y = 1000 \Rightarrow 110y - y^2 - 1000 = 0$

$y' = 100$
$y'' = 10$

Substituindo-se (1), vem:

$y = 100 \Rightarrow x = 110 - y$ $\quad$ $y = 10 \Rightarrow x = 110 - 10$

$x = 10$ $\quad$ $x = 100$

Ambos valores satisfazem as CE:

$\begin{cases} x = 10 \\ y = 100 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$

Mudança de Base

Até o momento, em todas as propriedades utilizadas consideramos o fato de os logaritmos estarem sempre na mesma base. Mas o que fazer quando aparecem bases diferentes e que precisam reduzir os logaritmos para uma base conveniente?

-> Vejamos o seguinte exemplo: Dado $\log_a b$, indicá-lo em outra base c($\log_c b$).

Suponhamos que $\log_a b = x$* e $\log_c b = y$**, fazemos as substituições:

$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow b = a^x \\ \log_c b = y \Rightarrow b = c^x \end{cases}$ $\quad$ portanto $a^x = c^x$

Tomando os logaritmos do 1º e do 2º membros na base c, temos:

$\log_c a^x = \log_c c^y \Rightarrow x \log_c a = y \log_c c$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \cdot 1 \Rightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

portanto $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\quad$ $b > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$

Mais Exemplos:

1. Resolva a equação $\log_2 x + \log_8 x = 8$

CE $\{ x > 0$

* podemos observar que na expressão aparecem logaritmos nas bases 2 e 8, neste caso deixaremos ambos com a menor base, ou seja, base 2.

Então: $\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 8$

relembrando que: $\log_2 8 = 3$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{3} = 8$ $\quad \dfrac{3\log_2 x + \log_2 x}{\cancel{3}} = \dfrac{24}{\cancel{3}}$

$3\log_2 x + \log_2 x = 24 \Rightarrow 4\log_2 x = 24$

$\log_2 x = \dfrac{24}{4}$

$\log_2 x = 6 \therefore x = 2^6 = 64$

$x > 0 \Rightarrow 64 > 0$

2. - Simplificar a expressão $(\log_4 9) . (\log_{81} 16) . (\log_{27} 8) : (\log$

* Deixar todos os logs na base 4 (menor base).

$\dfrac{\log_4 9}{1} . \dfrac{\log_4 16}{\log_4 81} . \dfrac{\cancel{\log_4 8}}{\log_4 27} . \dfrac{\log_4 3}{\cancel{\log_4 8}}$

$\dfrac{\log_4 3^2 . \log_4 4^2 . \log_4 3}{\log_4 3^4 . \log_4 3^3} = \dfrac{2\log_4 3 . 2\log_4 4 . \log_4 3}{4\log_4 3 . 3\log_4 3} =$ $\quad = 1$

$\dfrac{2\cancel{\log_4 3} . 2\cancel{\log_4 3}}{4\cancel{\log_4 3} . 3\cancel{\log_4 3}} = \dfrac{2.2}{4.3} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

3. - Sendo * $\log 2 = 0,3$ e * $\log 3 = 0,4$, calcular $\log_2 6$.

* Neste caso tanto $\log 2$ e $\log 3$ estão na base 10, então vamos passar $\log_2 6$ para a mesma base:

tilibra

Então:

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 2 \cdot 3}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}$$

substituindo * e ** na equação, teremos:

$$\frac{0,3 + 0,4}{0,3} = \frac{0,7}{0,3} = \frac{7}{3}$$

Função logarítmica

Sendo a um número real, positivo e diferente de 1, chamamos de função logarítmica de base a a função $g: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a x$. $(x \in \mathbb{R}^*_+)$

Domínio da Função Logarítmica

Para determinar o domínio de uma função logarítmica basta aplicar as condições de existência dos logaritmos, isto é, o logaritmando deve ser um número real positivo e a base deve ser positiva e diferente de um.

$\boxed{D = \mathbb{R}^*_+}$ $\boxed{Im = \mathbb{R}}$

Exemplo:

$y = \log_3 (12 - 5x)$

$12 - 5x > 0$

$12 > 5x$

$\frac{12}{5} > x$

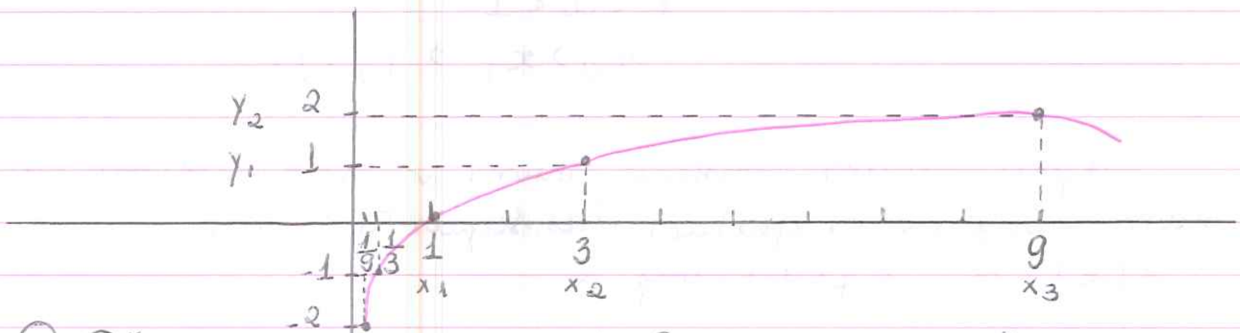
Gráfico da Função Logarítmica

Determinar o gráfico das seguintes funções logarítmicas. (lembrar que o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}^*_+$) podemos atribuir somente valores positivos a x.

Exemplos

1) $y = \log_3 x$ $(a = 3 > 0)$

x	$y = \log_3 x$
$\frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 9^{-1} = -1 \log_3 9 = -1 \cdot 2 =$
$\frac{1}{3}$	$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1 \cdot 1 = -1$
1	$\log_3 1 = 0$
3	$\log_3 3 = 1$
9	$\log_3 9 = 2$



$D = \mathbb{R}^*_+$
$Im = \mathbb{R}$

esta função é crescente, pois $a > 1$
$x_2 > x_1 \rightarrow y_2 > y_1$

2 - $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

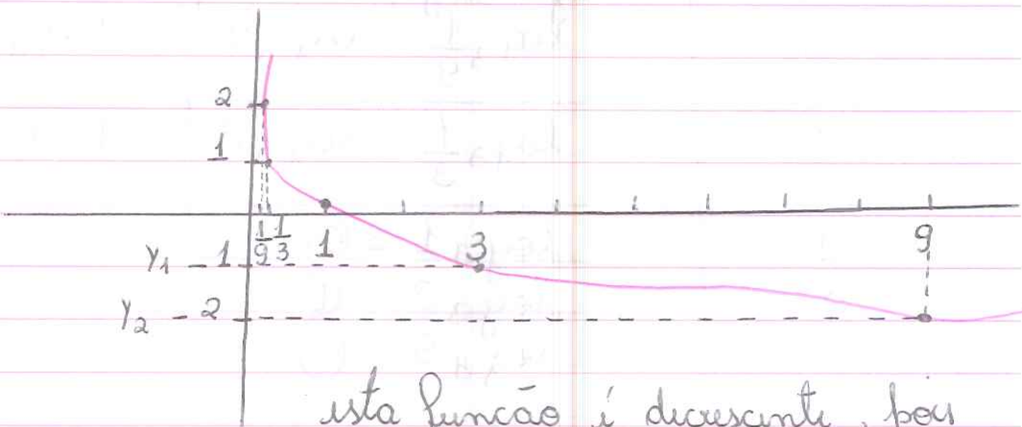
x	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{9}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$
$\frac{1}{3}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$
1	$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$
3	$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$
9	$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

$\frac{1}{3}^{2} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{3}^{0} = 1$

$\frac{1}{3}^{-1} = 3$

$\frac{1}{3}^{-2} = 9$



$D = \mathbb{R}^*_+$

$Im = \mathbb{R}$

esta função é decrescente, pois $0 < a < 1$

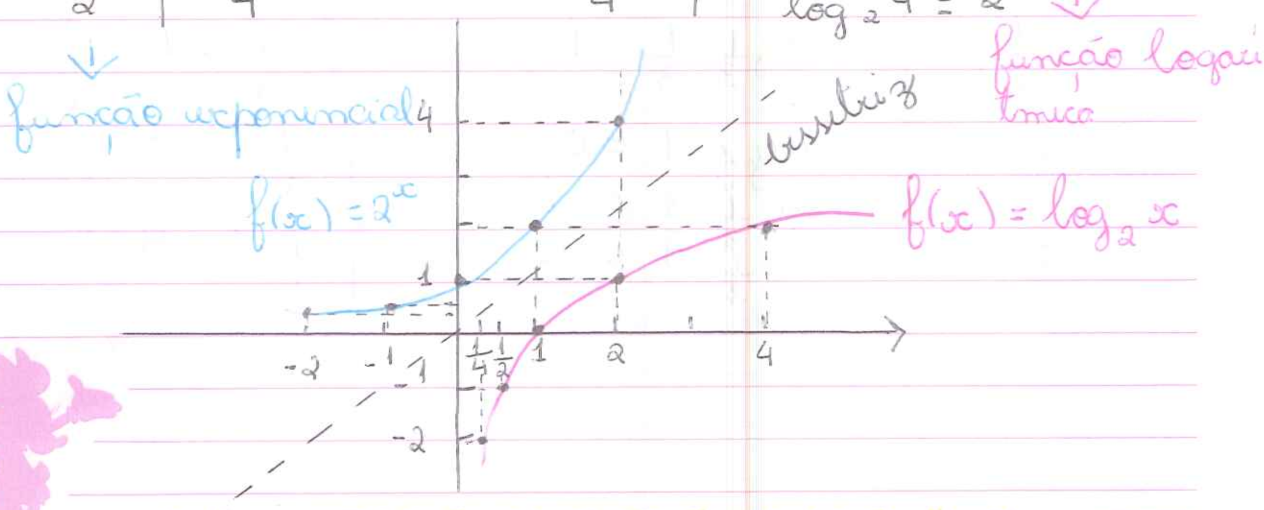
$x_2 > x_1 \rightarrow y_2 < y_1$

Agora, vamos construir num mesmo sistema cartesiano ortogonal os gráficos das seguintes funções:

$f(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2 x$

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$\log_2 4^{-1} = -1 \cdot 2 = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 2^{-1} = -1 \cdot 1 = -1$
1	$\log_2 1 = 2^0 = 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$



Através destes dois exemplos, é possível notar que:

* os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

* a função logarítmica é uma função inversa da exponencial

os pontos da função exponencial são:

$(-2, \frac{1}{4})$

$(-1, \frac{1}{2})$

$(0, 1)$

$(1, 2)$

$(2, 4)$

já os da função logarítmica são:

$(\frac{1}{4}, -2)$

$(\frac{1}{2}, -1)$

$(1, 0)$

$(2, 1)$

$(4, 2)$

pontos inversos $(x, y) \to (y, x)$

Curiosidades...

* Os logaritmos surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

* Napier foi um dos que impulsionaram fortemente o desenvolvimento dos logaritmos, perto do século XVII.

* Napier e Bürgi juntos elaboraram a tábua dos logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns (usados nos dias de hoje).

* Durante anos ensinou-se a calcular logaritmos, atra-

vés da régua de cálculo logarítmica que foi o símbolo do estudante de engenharia.

* O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos.

* Diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos.