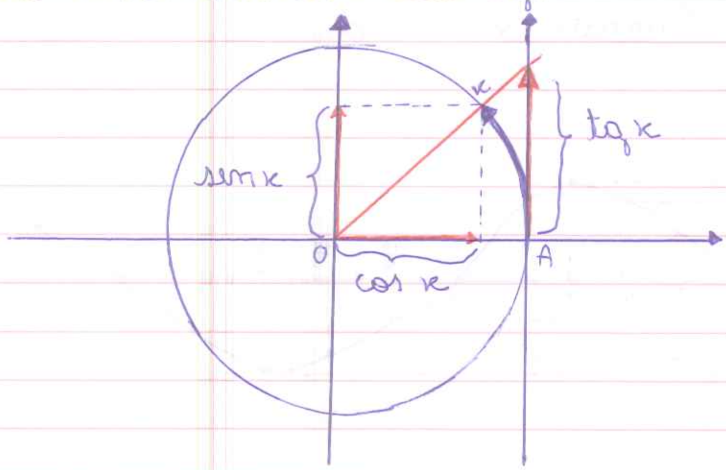
Relatório PIBID - Matemática

Taynara Oliveira da Rosa.

Funçõis Trigonométricas

conceituação:

A cada nº real x podemos associar um único sen x, um único cos x e, uma única tg x.



Esses fatos nos permitem definir as funçõis trigonométricas $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = \cos x$ e $h(x) = tg(x)$:

$f(x) = \text{sen}\, x$

$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} \text{sen}\, x \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

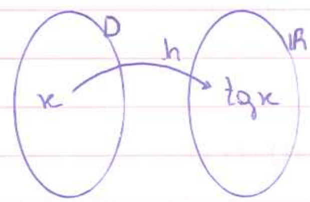
$g(x) = \cos x$

$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} \cos x \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

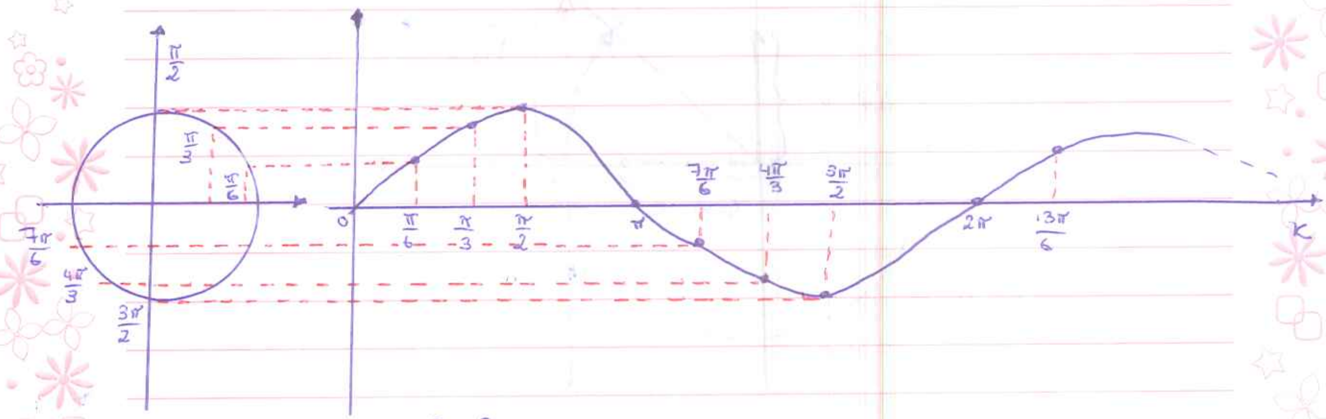
$h(x) = tg(x)$



$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \mathbb{R}$

Gráfico da Função $y = \operatorname{sen} x$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$

Esse gráfico é obtido pela repetição da figura determinada quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica, por isso dizemos que essa função é periódica e que seu período é 2π.

Utilizando a linguagem precisa, dizemos que a função $y = \operatorname{sen} x$ é periódica porque existe pelo menos um nº real positivo p que satisfaz a condição $\operatorname{sen}(x+p) = \operatorname{sen} x$, para qualquer real x, por exemplo,

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen}(x+6\pi) = \operatorname{sen} x \quad \text{etc.}$$

O menor nº positivo p que satisfaz essa condição é chamado de período da função $y = \operatorname{sen} x$; esse nº é 2π.

Exercício

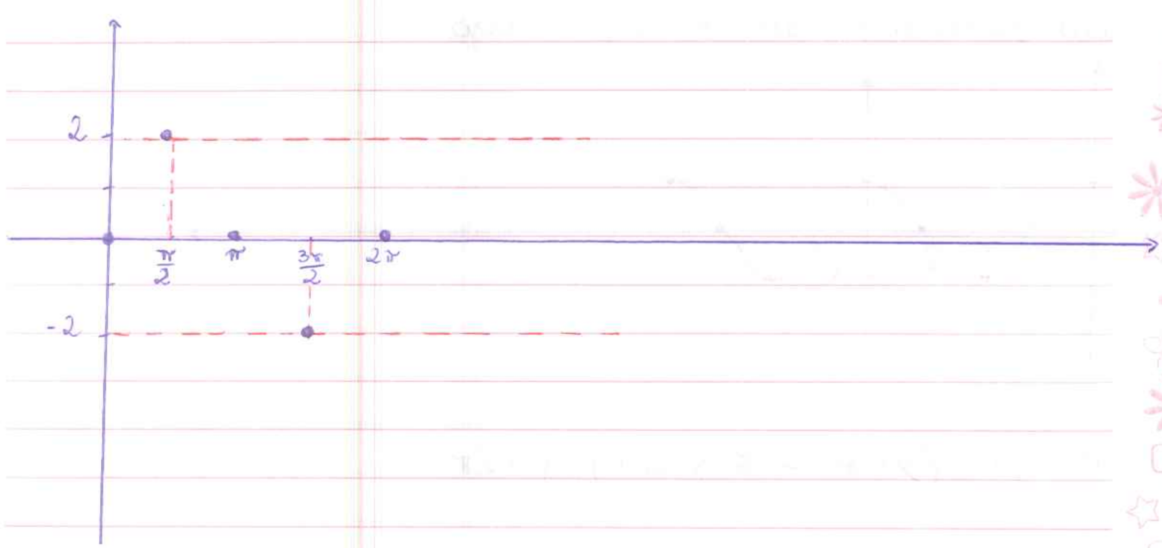
Esboçar o gráfico da função $y = 2 \operatorname{sen} x$

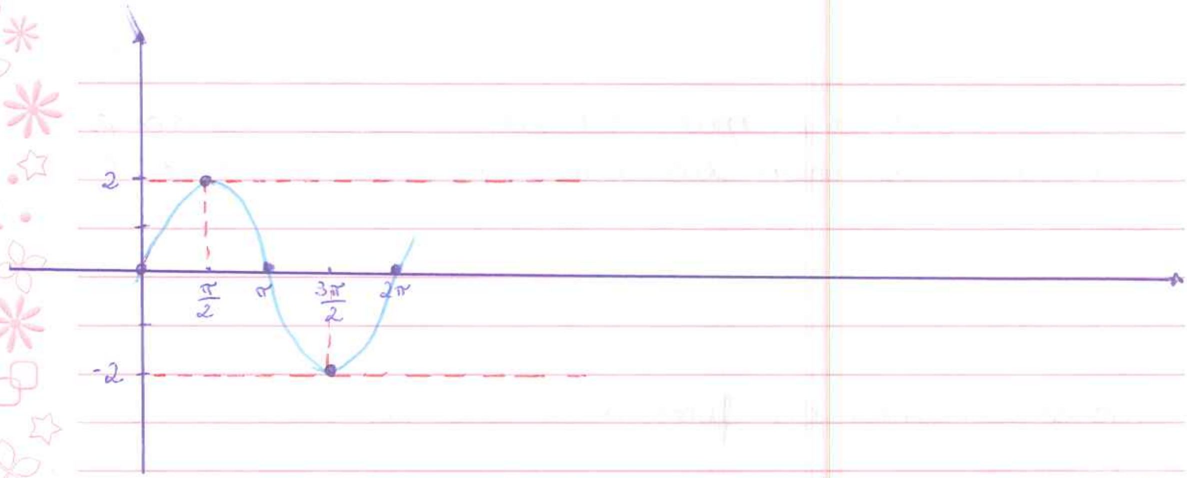
Resolução

Para um esboço do gráfico, basta atribuirmos ao arco x os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π e calcularmos os correspondentes valores de y, conforme a tabela abaixo.

x	y
0	0
$\pi/2$	2
π	0
$3\pi/2$	-2
2π	0

Marcando no plano cartesiano os pontos $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:





$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \,/\, -2 \leq y \leq 2\}$; $p = 2\pi$ (indicamos por P o período).

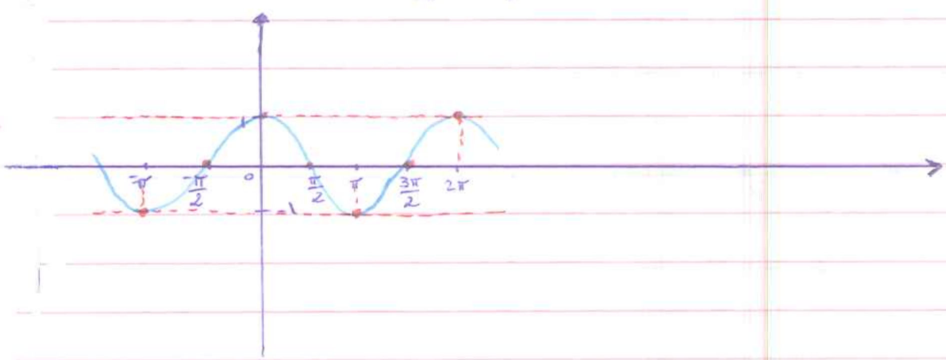
Obs: Construímos apenas um período do gráfico, porém não perca de vista que essa figura se repete tanto até o $+\infty$ como até o $-\infty$ na direção do eixo das abscissas.

Gráfico da função $y = \cos x$

Observando que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{2} =$

$= 1 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 0 = \cos x$

Concluímos que o gráfico da função $y = \cos x$ é o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou seja:



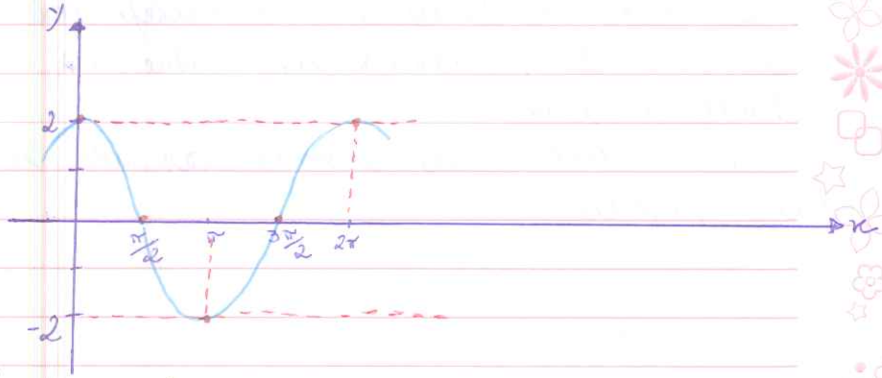
$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq y \leq 1\}$; $p = 2\pi$

Exercício

Esboçar o gráfico da função $y = 2\cos x$.

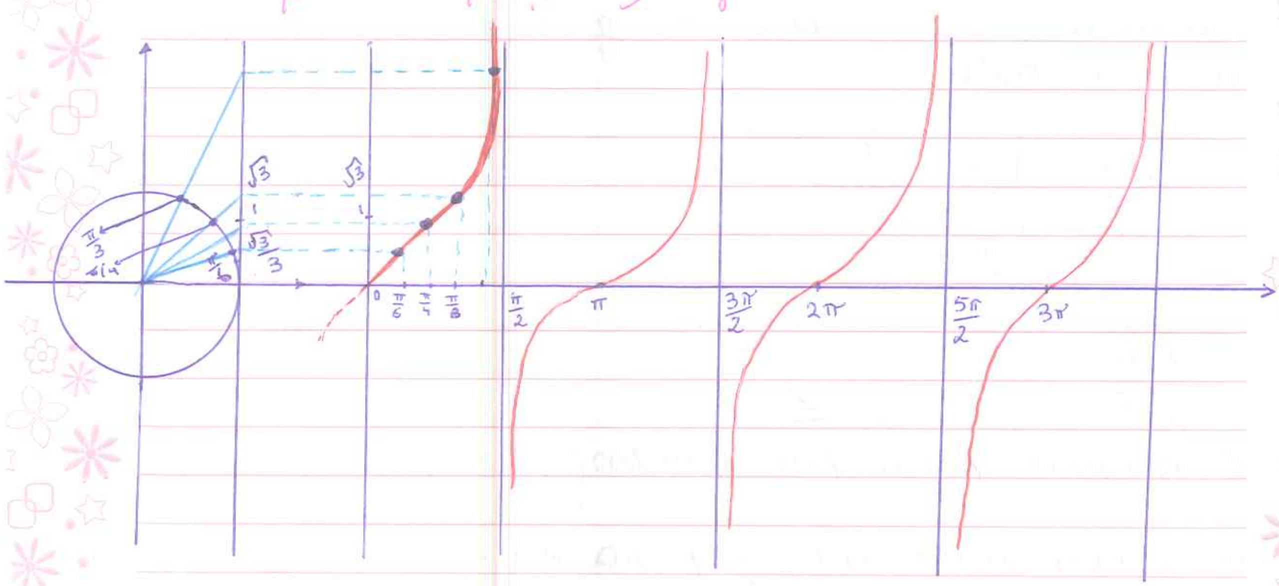
Resolução

x	y
0	2
$\pi/2$	0
π	-2
$3\pi/2$	0
2π	2



$D = \mathbb{R};\ Im = \{y \in \mathbb{R} / -2 \leq y \leq 2\};\ P = 2\pi$

Gráfico da função $y = tg\,x$



$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\};\ Im = \mathbb{R};\ P = \pi$

As retas verticais que passam pelos pontos de abscissas ..., $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ... não tem ponto comum com o gráfico,

e quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre ela e o gráfico tende a zero.
Essas retas são chamadas de assíntotas verticais do gráfico.

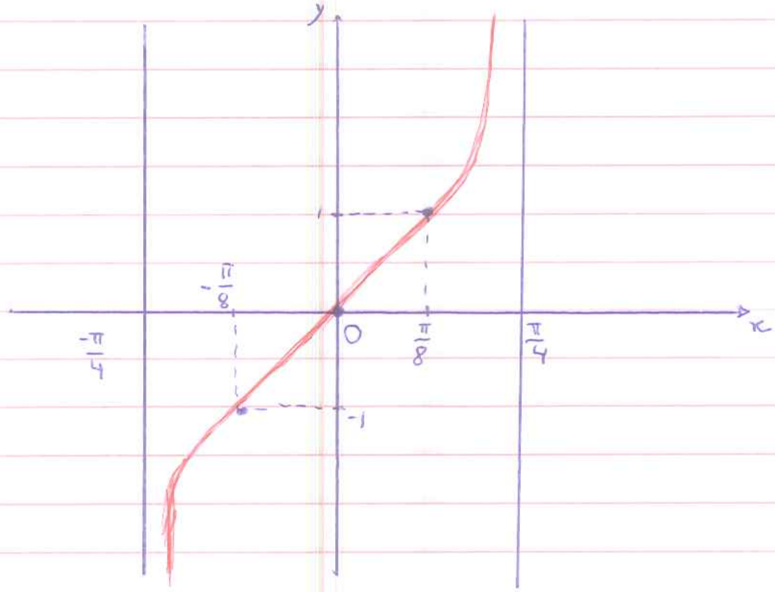
Exercício

Esboçar o gráfico da função $y = tg\, 2x$.
Resolução:
Para esboçar um período do gráfico, atribuímos ao arco $2x$ os valores $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Assim, temos a tabela:

$2x$	x	y
$-\pi/2$	$-\pi/4$	$\nexists$
$-\pi/4$	$-\pi/8$	-1
0	0	0
$\pi/4$	$\pi/8$	1
$\pi/2$	$\pi/4$	$\nexists$

O gráfico passa pelos pontos $\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$.

Como não existe a $tg\, 2x$ para $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$, temos que duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abscissas $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.
Logo, um período do gráfico é:



o domínio é obtido impondo-se a condição de existência para a $tg\,2x$, isto é:

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Logo, o domínio é o conjunto: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

O período da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é:

$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $p = \frac{\pi}{2}$