Matrizes

Chama-se matriz do tipo $m \times n$ toda tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas

Ex:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$ é uma matriz 3×2

Matriz formada por apenas uma linha chama-se matriz linha.

Ex: $(x \; x^2 \; x^3 \; x^4)$ é uma matriz 1×4

Matriz formada por apenas uma coluna é matriz coluna.

Ex: $$\begin{bmatrix} x \\ 3x \\ 9x \end{bmatrix}$$ é uma matriz 3×1

Representação: um elemento de uma matriz é representado por uma letra minúscula acompanhada de um duplo índice: a_{ij}

O primeiro número do índice (i) mostra a linha, o segundo (j) mostra a coluna.

Ex: A 2×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- a_{11} (lê-se: a um um): 1° linha e 1° coluna;
- a_{12} (lê-se: a um dois): 1° linha e 2° coluna;
- a_{23} (lê-se: a dois três): 2° linha e 3° coluna;

$A = (a_{ij})_{2 \times 3}$

tilibra

Exemplo: Construir a matriz $A=(a_{ij})_{2\times4}$ sabendo que $a_{ij}=3i+j$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$ forma genérica

Sendo $a_{ij}=3i+j$, temos

$a_{11}=3\cdot(1)+1=4$ $\quad$ $a_{21}=3\cdot(2)+1=7$

$a_{12}=3\cdot(1)+2=5$ $\quad$ $a_{22}=3\cdot(2)+2=8$

$a_{13}=3\cdot(1)+3=6$ $\quad$ $a_{23}=3\cdot(2)+3=9$

$a_{14}=3\cdot(1)+4=7$ $\quad$ $a_{24}=3\cdot(2)+4=10$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada: quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Uma matriz quadrada $n\times n$ é chamada matriz quadrada ordem n.

Ex:

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Em uma matriz quadrada de ordem n, a diagonal formada pelos elementos a_{ij} com $i=j$, isto é, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, é chamada de diagonal principal, e a outra é chamada de diagonal secundária

Diagonal Secundária

Ex:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

Matriz diagonal: Se todos os elementos que não pertencem à diagonal principal forem iguais a zero, ela será chamada de matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Ex:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade: Se os elementos da diagonal principal de uma matriz diagonal de ordem n forem iguais a 1, então ela será chamada de matriz identidade de ordem n e indicada por In

$$I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ é a matriz de ordem 3.

Matriz transposta: Chama-se transposta de uma matriz A, do tipo $m \times n$, a matriz do tipo $n \times m$ cujas linhas coincidem ordenadamente com as colunas da matriz A. Indica-se a matriz transposta de A por A^t

Ex: Se $A \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ então $A^t \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Matrizes iguais: se duas matrizes A e B forem do mesmo tipo $m \times n$, então os elementos com o mesmo índice são chamados elementos correspondentes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Os elementos correspondentes são: a_{11} e b_{11}, a_{12} e b_{12}, a_{21} e b_{21}, a_{22} e b_{22}

Adição e Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B, do mesmo tipo $m \times n$, chama-se soma de A com B, indicada por $A+B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad e \quad B \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A+B \left| \begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{matrix} \right.$$

Ex:

Sendo $A = \begin{matrix} 7 & -1 \\ 2 & 9 \end{matrix}$ e $B = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{matrix}$ determinar $A+B$

$$A+B = \begin{matrix} 7 & -1 \\ 2 & 9 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{matrix} = \begin{matrix} 7+1 & -1+1 \\ 2+5 & 9+(-2) \end{matrix} = \begin{matrix} 8 & 0 \\ 7 & 7 \end{matrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

1° Comutativa: $A+B = B+A$

2° Associativa: $A+(B+C) = (A+B)+C$

3° Elemento Neutro: existe a matriz nula $\mathbf{O}$, do mesmo tipo $m \times n$, tal que: $A+O = O+A = A$

4° Elemento oposto: Existe a matriz $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$, de modo que: $A+(-A) = O$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dada a matriz A, do tipo $m \times n$, e um número real K, chama-se produto de K por A, indicado por $K \cdot A$, à matriz que se obtém multiplicando-se todo elemento de A por K.

Ex: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$K \cdot A = K \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \cdot a_{11} & K \cdot a_{12} \\ K \cdot a_{21} & K \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Ex: Calcular o produto do número 2 pela matriz

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot5 & 2\cdot6 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot2 & 2\cdot3 & 2\cdot7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & -2 \\ 4 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

tilibra

Multiplicação de matrizes

É realizada de acordo com seguinte condição: o nº de colunas da 1º matriz matriz deve ser igual ao nº de linhas da 2º matriz. Do tipo m x p.

Ex

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (2 \cdot 2)+(5 \cdot 4)+(9 \cdot 5) & (2 \cdot 7)+(5 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 2) \\ (3 \cdot 2)+(6 \cdot 4)+(8 \cdot 5) & (3 \cdot 7)+(6 \cdot 3)+(8 \cdot 2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4+20+45 & 14+15+18 \\ 6+24+40 & 21+18+16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 69 & 47 \\ 70 & 55 \end{vmatrix}$$

Matriz inversa

Considere uma matriz quadrada A de ordem n. Se existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, tal que:

$$AB = I_n$$

então a matriz B será chamada de inversa da matriz A, sendo indicada por A^{-1}. Nesse caso dizemos que a matriz é inversível. Se não existir a matriz B, dizemos que a matriz A não tem inversa, ou seja, não é inversível.

Ex: Verificar se são inversas:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+0-2 & 0+0+0 & -6+0+6 \\ 9-2-7 & 0+1+0 & -18-3+21 \\ 1+0-1 & 0+0+0 & -2+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B são inversas entre si.

Determinantes

Um número associado a uma matriz

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1

O determinante da matriz $A=[a_{11}]$, indicado por $\det A$ ou $|a_{11}|$, é o próprio elemento a_{11} ou seja:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2

O determinante da matriz é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Exemplos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.5 - 2.9 = 30 - 18 = 12$$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Ex: Calcular o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$

$$= \underbrace{2\cdot5\cdot4}_{40} + \underbrace{0\cdot6\cdot(-1)}_{0} + \underbrace{2\cdot1\cdot3}_{6} - \underbrace{(-1)\cdot5\cdot2}_{10} - \underbrace{3\cdot6\cdot2}_{36} - \underbrace{4\cdot1\cdot0}_{0} = 20$$

$40 + 0 + 6 + 10 - 36 \quad 0$

Regra de Sarrus

- copia-se o determinante repetindo-se as duas primeiras colunas;
- multiplicam-se os elementos ligados por "traços", mantendo-se o sinal de cada produto;
- multiplicam-se os elementos ligados por "pontinhos", trocando sinal de cada produto
- somam-se os resultados obtidos.

$\rightarrow -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$

$\rightarrow -a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$

$\rightarrow -a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Somar

$\rightarrow a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

$\rightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

$\rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

det A

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

tilibra

Ex: Calcular o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right.$$

$\det B = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 4 - (-1) \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 20$

Cofator de um elemento de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$)

Consideremos uma matriz quadrada A, de ordem n, e o elemento a_{ij} de A

Chama-se cofator de a_{ij} ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida, quando se elimina em A a linha i e a coluna j. Indica-se o cofator de a_{ij} por C_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

O cofator de a_{32} será:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} = (-1)^5 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} = -(a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}) =$$

$$= a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23}$$

Exemplo: dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ calcular

C_{23} $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^5 \cdot [2 \cdot 4 - 5 \cdot 6] = -1 \cdot (8-30) = -1 \cdot (-22) = 22$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem n

→ Teorema de Laplace

1°) se $n = 1$, o determinante da matriz A será o próprio elemento da matriz

2°) se $n > 1$, o determinante da matriz A será o numero real que se obtem somando-se os produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores

Ex:

$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

$D = a_{21} \cdot C_{21} + a_{22} \cdot C_{22} + \underbrace{a_{23} \cdot C_{23}}_{0}$

$D = 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$D = 4 \cdot (-1) \cdot (2 - 12) + 5 \cdot (+1) \cdot (-3 - 2)$

$D = -4 \cdot (-10) + 5 \cdot (-5)$

$D = 40 - 25 = 15$

Propriedades dos determinantes

1° Se os elementos de uma fila de uma matriz forem iguais a zero, seu determinante será nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2° Se uma matriz quadrada tiver duas filas paralelas iguais, seu determinante será nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

3° Se multiplicarmos todos os elementos de uma fila de uma matriz quadrada por um número real, seu determinante ficará multiplicado por esse número.

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Multiplicando todos os elementos da 1ª linha de A pelo número real K, teremos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} K.a & K.b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ tal que } \det B = \begin{bmatrix} K.a & K.b \\ c & d \end{bmatrix} = K.a.d - K.b.c = K.(ad-bc)$$

Logo $\det B = K \cdot \det A$, ou seja $\begin{vmatrix} Ka & Kb \\ c & d \end{vmatrix} = K \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

4° Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, o determinante da matriz produto AB é igual ao produto dos determinantes das matrizes A e B, isto é:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, em que $\det A = -6$ e $\det B = 8$

$6 \cdot 1 = 6$, $4 \cdot 3 = 12$, $6 - 12 = -6$ $\quad$ $3 \cdot 2 = 6$, $1 \cdot (-2) = -2$, $6 - (-2) = 8$

Calculemos a matriz produto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+3 & -12+6 \\ 12+1 & -8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -6 \\ 13 & -6 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz AB, temos:

$$\det AB \begin{vmatrix} 21 & -6 \\ 13 & -6 \end{vmatrix} = -126 + 78 \Rightarrow \det AB = -48$$

Então, nesse caso, $\underbrace{\det A}_{-6} \cdot \underbrace{\det B}_{8} = \underbrace{\det (AB)}_{-48}$

5°

1°) Uma matriz quadrada A tem inversa se $\det A \neq 0$

2°) O determinante da matriz inversa de A é o inverso do determinante da matriz A.

Ex: Seja A uma matriz quadrada de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Se A admitir a matriz inversa, teremos:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$

Como $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ e $\det I = 1$ temos:

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Então $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, desde que $\det A \neq 0$

Ex: se o determinante de uma matriz A é $-\frac{3}{5}$, então o determinante da matriz inversa de A é $-\frac{5}{3}$:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{5}{3}$$