Universidade Federal do Pampa

Campus Caçapava do Sul

Curso de Licenciatura em Ciências Exatas

Programa Institucional de Iniciação a Docência - PIBID

ABIA SOARES CHAVES

FABIANA GONÇALVES

MARIA HELENA DIAS

SIMONI PERIPOLI

SUELEM GARCIA

VALÉRIA OLIVEIRA PERCEVAL

PROBLEMATIZAÇÕES ENVOLVENDO APLICABILIDADE DE MATRIZES

Caçapava do Sul

Outubro de 2013

Introdução

Nem sempre a matemática é abordada de uma maneira que tenha significado para os alunos. As novas propostas do Ensino Médio Politécnico (Secretaria de Educação – RS, 2011)sugerem um Ensino Médio que contemple a qualificação, a articulação com o mundo do trabalho e práticas produtivas, com responsabilidade e sustentabilidade e com qualidade cidadã. Desta forma, busca-se uma maneira de relacionar os conteúdos estudados, com as situações vivenciadas pelos alunos. A proposta apresentada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID,vem de encontro a essa necessidade, uma vez que proporciona intervenções escolares, nas quais os bolsistas tem a possibilidade de auxiliar os professores das escolas vinculadas ao programa a colocar em prática essas tarefas.

Sugerir uma pesquisa que envolva os alunos, fazendo com que eles possam entender onde está incluída a matemática em seu dia- a – dia possibilitará a eles, fazer uma aproximação dos conceitos e as situações envolvidas.

Através de uma pesquisa envolvendo o conteúdo de Matrizes, pretende-se desenvolver um tarefa na qual os alunos possam verificar a sua aplicabilidade no seu cotidiano. O tema foi escolhido, levando em conta a dificuldade de associar este conteúdo com as atividades diárias, pois muitas vezes os alunos perguntam "*para que serve isto, onde eu vou usar?*"

Em relação ao ensino da matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que como objetivos dessa disciplina no Ensino Médio, possibilitar ao aluno (Brasil, 1999):

> Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizado ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; (BRASIL, 1999, p. 42)

Nesse contexto, espera-se que os alunos possam compreender o conteúdo matemático de uma forma mais significativa.

Objetivo

Relacionar os conteúdos de matrizes e a sua aplicabilidade, despertando no aluno o senso investigativo através de pesquisas envolvendo um contexto do cotidiano, proporcionando a ele um melhor entendimento do conteúdo, e auxiliar os professores da rede pública nos seminários integrados do Ensino médio politécnico.

Justificativa

Através do contexto de pesquisa pretende-se levar o aluno a construir o seu conhecimento, tornando assim, o ensino de matemática mais contextualizado e próximo do aluno, relacionando o conteúdo com outras situações vivenciadas por eles no seu dia-a-dia.

Metodologia

A proposta de trabalho será desenvolvida com alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio Politécnico. Durante o desenvolvimento deste trabalho, os alunos serão incentivados a pesquisarem sobre o conteúdo de matrizes e sua aplicabilidade no dia a dia, através de entrevistas em academias de ginástica e nutricionistas. Além dessas entrevistas, poderão também realizar pesquisas em livros e internet. Os temas escolhidos previamente poderão ser adaptados ou substituídos por outros de maior interesse dos alunos. Dessa forma, pretende-se mostrar a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos estudados no ensino médio, através de pesquisas realizadas pelos alunos.

Após realizada a etapa de pesquisa e coleta de dados, os alunos irão criar tabelas com os dados obtidos, para a partir daí apresentarem para os colegas. Com esses dados e com as tabelas prontas, os alunos serão motivados a montarem as matrizes, uma forma que eles mesmos cheguem a conclusão do que estão realizando. Esta etapa será conduzida através de dialogo com a turma e esclarecimentos pelo grupo de bolsistas.Esse dialogo estabelecido durante a apresentação, entre a supervisora, as bolsistas e os alunos será de fundamental importância para que eles façam a associação dos dados da pesquisa com o conteúdo matemático proposto.

A próxima etapa é a realização de cálculos utilizando os conceitos de matrizes. A última etapa será a utilização de planilhas eletrônicas para que eles tenham um contato com as tecnologias relacionadas aos conteúdos escolares.

Ao final serão distribuídas algumas perguntas sobre o tema abordado (anexo 3) para os alunos responderem, para que possamos verificar se os objetivos foram atingidos.

Nutrição balanceada

Este tema será abordado devendo ser levantado os seguintes dados:

- ✓ Quantidade de calorias diária necessárias para uma pessoa considerando os seguintes pesos: 40-50, 50-60, 60-70, 70-80 e 80-90 quilos.
- ✓ Quais os alimentos para um cardápio saudável.
- ✓ Quantas calorias possui cada alimento desse cardápio.

Atividade física diária

Esse tema será abordado com os seguintes questionamentos:

- ✓ Qual o tempo médio por dia deve-se praticar exercícios físicos.
- ✓ Qual a quantidade de calorias que uma pessoa perde em um programa de ginástica, considerando-se os pesos acima em um cronograma de corrida, caminhada e andar debicicleta.

Os alunos poderão incluir novos questionamentos em suas pesquisas, conforme o interesse de cada grupo.

Cronograma

Cronograma

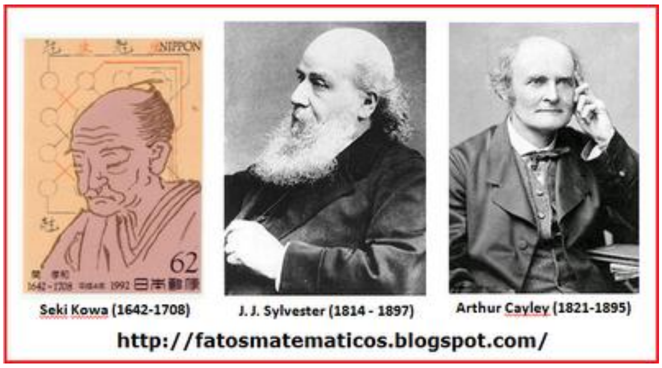
Data	**Atividade**
06/11 – 2h/aula	Apresentação da proposta Debater texto sobre Matrizes (anexo 1) Breve revisão do conteúdo (anexo 2) Divisão da turma em grupos para realização de pesquisa
13/11 – 2h/aula	Problematizações com os dados da pesquisa
14/11- 1h/aula	Desenvolvimento dos conteúdos pesquisados em planilhas eletrônicas

Referencias:

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília: MEC/SEMT, 1999.

SILVA, Cledvan Marques: Modelando matrizes na perspectiva discente. Disponível em: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAe9tIAC/projeto-didatico-modelando-matrizes.
Acesso em: 11/10/2013

Anexo 1 – Uma Breve História das Matrizes e Determinantes



O início das matrizes e determinantes remontam ao século II a.C. embora alguns vestígios desse assunto foi encontrado no século VI a.C. Somente no final do século XVII que as ideias reapareceram e desenvolveram até os dias atuais.

Não é de estranhar que o início de matrizes e determinantes está intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. Os babilônios estudaram problemas que levam a resolução de um sistema linear de duas variáveis e duas equações, sendo que alguns destes problemas foram preservados em tabletas de argilas.

Os chineses, entre $200\ a.C$ e $100\ a.C.$ chegou muito mais perto de matrizes que os babilônios. Na verdade, é justo dizer que o texto Nove Capítulos da Arte Matemática escrito durante a dinastia Han dá o primeiro exemplo conhecido de métodos de matriz. Vejamos um problema contido neste texto.

- Existem três tipos de milho, dos quais três feixes é do primeiro tipo, dois do segundo, e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidos em um pacote de cada tipo?

O autor deste problema faz algo bastante notável. Ele define os coeficientes de três equações lineares a três incógnitas com uma tabela abaixo:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Em notação moderna, se x, y e z denotam os três tipos de milhos, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Observe que a única diferença desses dois métodos é que nós escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz em vez de colunas.

Mais notavelmente o autor, escrito em $200\ a.C.$, instrui o leitor a multiplicar a coluna do meio por 3 e subtrair a coluna da direita *tantas vezes quanto possível*, o mesmo é então feito subtraindo-se a coluna da direita *tantas vezes quanto possível* a partir de 3 vezes a primeira coluna. Isto nos dá

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Em seguida a coluna mais à direita é multiplicada por 5 e, em seguida, a coluna do meio é subtraída o número de vezes possível. Isto nos dá

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

a partir do qual a solução pode ser encontrada para o terceiro milho, em seguida, para o segundo, então o primeiro por retro substituição. Este método, hoje conhecido desde o século XIX.

Girolamo Cardano, em Ars Magna (1545), dá uma regra para a solução de um sistema de duas equações lineares que ele chama de regulamentação de Modo. Esta regra dá o que é essencialmente a regra de Cramer para resolver sistemas lineares 2×2.

Muitos resultados da teoria padrão de matrizes elementares apareceu pela primeira vez muito antes das matrizes serem objetos de investigação matemática. Por exemplo, de Witt em seus Elementos de Curvas, publicado como parte dos comentários sobre a versão latina de 1660 da Geométrie de Descartes, mostrou como uma transformação de eixos reduz uma equação dada para uma cônica a transforma na forma canônica. Isso equivale a diagonalização de uma matriz simétrica, mas de Witt nunca pensou nesses termos.

A ideia de um determinante apareceu no Japão e na Europa quase simultaneamente, embora o matemático Seki, no Japão, publicasse suas ideias antes. Em 1683, Seki escreveu *Método de Resolver os Problemas Dissimulados* que contém métodos matriciais escritos como tabelas exatamente do jeito que os métodos chineses acima foram construídos.

Em 1826, Cauchy no contexto das formas quadráticas em n variáveis, encontrou os auto valores e deu resultados sobre a diagonalização de uma matriz. Além disso, ele introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem a mesmo polinômio característico.

O primeiro a usar o termo "matriz" foi Sylvester em 1850. Sylvester definiu uma matriz para ser um *arranjo retangular de termos* e viu-os como algo que levou a vários determinantes de matrizes quadradas nela contida. Depois de deixar a América e voltou para a Inglaterra em 1851, Sylvester se tornou advogado e conheceu Cayley e compartilharam seus interesses na matemática. Cayley percebeu rapidamente o significado do conceito de matriz e por volta de 1853, Cayley havia publicado uma nota apresentando pela primeira vez a inversa de uma matriz.

A nulidade de uma matriz quadrada foi definida por Sylvester em 1884. Ele definiu a nulidade de uma matriz A de ordem n como sendo o maior i tal que todos os i menores de ordem $n-1$, são nulos. Sylvester estava interessado em invariantes de matrizes, que é a propriedades que não são alteradas por certas transformações.

Atualmente os conceitos de matrizes e determinantes são importantes nas aplicações físicas, tais como a mecânica quântica e em várias teorias matemáticas que envolvem sistemas lineares.

Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html

Anexo 2

Revisão de Operações envolvendo Matrizes

$$\begin{array}{cc} \text{linha} \rightarrow & \begin{pmatrix} \boxed{8\ \ 7\ \ 9\ \ 8} \\ 6\ \ 6\ \ 7\ \ 6 \\ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 9 \end{pmatrix} \end{array} \text{ ou } \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1^a \text{ linha} \rightarrow \\ 2^a \text{ linha} \rightarrow \\ 3^a \text{ linha} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^a \text{ coluna} & 2^a \text{ coluna} & 3^a \text{ coluna} \end{array} \end{array}$$

Adição

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz , tal que $C = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$:

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A
b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n
d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (- B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{B = x.A}$$

Exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x . (yA) = (xy) . A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y) . A = xA + yA

d) elemento neutro : xA = A, para x=1, ou seja, A=A

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m\ x\ p}$ e $B = (b_{ij})_{p\ x\ n}$ é a matriz $C=(c_{ij})_{mxn}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1.(-1)+2.4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{4} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ \underbrace{\boxed{3.(-1) + 4.4}}_{c_{21}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underbrace{\boxed{3.3 + 4.2}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$A.B = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1 + 3.3} & \boxed{(-1).2 + 3.4} \\ \boxed{4.1 + 2.3} & \boxed{4.2 + 2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 + 3(-2) & 2.2 + 3.0 & 2.3 + 3.4 \\ 0.1 + 1(-2) & 0.2 + 1.0 & 0.3 + 1.4 \\ -1.1 + 4(-2) & -1.2 + 4.0 & -1.3 + 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.0 + 3(-1) & 1.3 + 2.1 + 3.4 \\ -2.2 + 0.0 + 4(-1) & -2.3 + 0.1 + 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = (A.B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A . B)_{3 \times 5}$
- Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A . B)_{4 \times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C

c) elemento neutro: $A . I_n = I_n . A = A$, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, $A .B =0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que $A = 0_{m \times n}$ ou $B = 0_{m \times n}$.

Fonte: http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes4.php

Anexo 3 – Perguntas

- O que acharam do projeto?

- Quais dificuldades encontradas para o desenvolvimento desta atividade?

- Conseguiram relacionar o conteúdo de matrizes ao tema proposto?

- Este projeto contribuiu de alguma forma, para o seu aprendizado? Por que?