Sistemas de Equações lineares

Chama-se sistema linear a todo sistema formado por equações lineares.

Podemos representar um sistema linear de m equações com n incógnitas por:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- os elementos a_{ij}, com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ são os coeficientes das incógnitas;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas
- $b_1, b_2, \dots, b_m$ são os termos independentes

Sistemas lineares homogêneos

Se todos os termos independentes de um sistema linear S forem nulos, o sistema é chamado de homogêneo e a n-upla $(0, 0 \dots, 0)$ é uma solução de S, chamada de solução nula ou trivial.

Ex:

$$S_1 \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Ex: $S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ e $S_2 \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$

$x = 1 \quad y = 2$

$$S_1 \begin{cases} 2.(1) + 3.(2) = 8 \\ 5.(1) - 2.(2) = 1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 2.(1) + 3.(2) = 8 \\ 3.(1) - 5.(2) = -7 \end{cases}$$

Matrizes de um sistema linear

a) Matriz incompleta - formada pelos coeficientes das variáveis.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Matriz completa - formada pelos coeficientes das variáveis e os termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matricialmente: $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{variáveis}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ termo independente

1- Sistema Possível e determinado (SPD)

É quando as incógnitas são determinadas

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad y = 3$$

2- Sistema possível e indeterminado (SPI)

É quando não é possível descobrir o valor das incógnitas

$$\{x + y = 8$$

→ Possuem infinitas respostas, é possível mas indeterminado, pois não sabemos o valor do x e do y.

3- Sistema impossível (SI)

Quando não admite solução.

$$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$$

é impossível, pois a expressão $3x + 9y$ não pode ser igual a 12 e igual a 15 para os mesmos valores de x e y.

Método de Comparação

Basta escolher uma variável qualquer, isolar a variável e comparar os resultados da outra equação.

Ex: $\begin{cases} x + 2y = 8 \ (I) \\ 2x - y = 1 \ (II) \end{cases}$ isolando o x $x + 2y = 8$

$\boxed{x = 8 - 2y}$ (III)

$2x - y = 1 \Rightarrow 2x = y + 1$

$\boxed{x = \frac{y+1}{2}}$ (IV)

De III e IV, tem:

$8 - 2y = \frac{y + 1}{2}$

$16 - 4y = y + 1$

$-4y - y = 1 - 16$

$-5y = -15$ $y = \frac{-15}{-5} = \boxed{y = 3}$

Substituindo o valor de y em qualquer das equações

(I) $x + 2y = 8$

$x + 2 \cdot 3 = 8 \rightarrow x + 6 = 8$

$x = 8 - 6$ $\boxed{x=2}$

Método de Substituição

Basta escolher uma variável qualquer, isolar e substituir seu valor em outra equação.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & (I) \\ 2x - y = 1 & (II) \end{cases}$$

Isolar x $x + 2y = 8$

$\boxed{x = 8 - 2y}$ (III) → substitui na II

$2x - y = 1$

$2(8 - 2y) - y = 1$

$16 - 4y - y = 1$

$-4y - y = 1 - 16$

$-5y = -15$ → substitui em qualquer equação

$y = \frac{-15}{-5} = \boxed{y=3}$

$x + 2y = 8$

$x + 2 \cdot 3 = 8$

$x + 6 = 8$

$x = 8 - 6$

$\boxed{x=2}$

Adição: uma das variáveis deve ser cancelada.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & (I) \\ 2x - y = 1 & (II) \end{cases}$$

A 1° equação multiplicar por (−2), porque −2x somando com 2x dará zero.

$$\begin{array}{r} -2x - 4y = -16 \\ +\ \ 2x - y = 1 \\ \hline 0 - 5y = -15 \end{array}$$

← repete e soma!

$y = \frac{-15}{-5} = 3$ → substitui em qualquer equação

$x + 2y = 8$

$x + 2 \cdot 3 = 8$

$x + 6 = 8$

$x = 8 - 6$

$x = 2$

Regra de Cramer

Matriz dos coeficientes: matriz que se obtem atraves dos coeficientes das variáveis

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

⇒ Matriz dos termos independentes

Resolver método de Cramer:

1° Calcular o determinante da matriz dos coeficientes
2° Para cada incógnita, devemos substituir sua respectiva coluna pelos elementos da matriz dos termos independentes na matriz dos coeficientes e calcular seus respectivos determinantes (Dx, Dy ...)
3° Para achar o valor de cada incógnita, basta dividir o resultado encontrado no passo 2 pelo resultado encontrado no passo 1.

Ex: Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

1° calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{D = -5}$$

$-1-4=-5$

← Troca pelo termo independente

2° Dx, Dy

$$Dx \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{Dx = -10}$$

$-8-2=-10$

$$Dy \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{Dy = -15}$$

$1-16=-15$

↳ matriz dos coeficientes

3° Dividimos por D cada um dos valores.

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-10}{-5} = 2 \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$$

Escalonamento

Uma forma de resolução no intuito de ampliar as técnicas capazes de determinar os valores das incógnitas de um sistema de equações lineares.

Ex:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\; y + z = 5 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

↳ todos tem uma incógnita faltando.

$\boxed{z=3}$

$y + z = 5$

$y + 3 = 5$

$y = 5 - 3$

$\boxed{y = 2}$

$x + y + z = 6$

$x + 2 + 3 = 6$

$x + 5 = 6$

$x = 6 - 5$

$\boxed{x = 1}$

1° criar uma matriz usando os coeficientes e os termos independentes

2° combinações lineares "aparecer zeros" de maneira que a matriz fique escalonada

3° Quando a matriz estiver escalonada, encontrar os valores das incógnitas fica fácil.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (-2L_1 + L_2)$$

tem que dar zero

1° linha multiplica por 2 e soma a 2° linha

$$\begin{array}{rrr} -2 & -4 & -16 \\ +\ 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -5 & -15 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

Pode ser

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -5y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y = -15 \Rightarrow y = \dfrac{-15}{-5} \Rightarrow \boxed{y = 3} \\ x + \underset{2.3}{2y} = 8 \Rightarrow x + 6 = 8 \end{cases}$$

$$x = 8 - 6$$

$$\boxed{x = 2}$$