/ /

PLANO DE AULA

Bolsista: Clarice Fonseca Vivian

Conteúdo: Análise combinatória

Objetivos: Proporcionar aos alunos a aprendizagem de conteúdos básicos relativos à análise combinatória

Metodologia: Aula expositiva dialogada, permitindo a identificação de conceitos já formados pelos alunos, bem como possíveis dificuldades; a aula parte de questões que abordam cada tópico.

Resolução de exercícios e problemas: em pequenos grupos (para favorecer a troca de ideias) e individual (permitindo a avaliação do desenvolvimento do aluno quanto ao tema).

Desenvolvimento:

Quantas placas de carros podemos obter ao utilizarmos as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos, de modo que cada placa deve ter três letras (não repetidas) e quatro números (repetidos ou não)?

Este problema envolve o cálculo do número de agrupamentos, e problemas deste tipo são chamados de "problemas de contagem".

A análise combinatória é a parte da matemática que estuda o número de possibilidades de ocorrer um determinado evento, mas sem descrever as possibilidades.

Estudaremos a seguir conceitos, tais como:

- FATORIAL

Sendo n um número inteiro maior que um ($n > 1$), chamamos de fatorial de n, indicado por $n!$, a expressão:

$$\boxed{n! = n(n-1).(n-2).\ldots.2.1}$$

Definições especiais:

$0! = 1$

$1! = 1$

Exemplos:

a) $4! = 4.3.2.1 = 24$

b) $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

SIMPLIFICAÇÕES

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20.19.\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$$

$$\frac{48!+49!}{50!} = \frac{\cancel{48!}(1+49)}{50.49.\cancel{48!}} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{50}.49} = \frac{1}{49}$$

Equações:

Ex: $(n-4)! = 120$

$(n-4)! = \underbrace{5.4.3.2.1}$

$(n-4)! = 5!$

$n-4 = 5$

$n = 5+4$

$n = 9$

/ /

• PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Veja a questão:

Em um prédio comercial existem 2 portas de entrada e 3 elevadores no saguão. Um vendedor pretende ir ao 5° andar utilizando utilizando um elevador. Quantas maneiras ele pode fazer isso?

1ª etapa (2 possibilidades)	2ª etapa (3 possibilidades)	Diferentes maneiras
P_1	e_1	$P_1 e_1$
	e_2	$P_1 e_2$
	e_3	$P_1 e_3$
P_2	e_1	$P_2 e_1$
	e_2	$P_2 e_2$
	e_3	$P_2 e_3$

$\Downarrow$

6 maneiras

Então:

nº de possibilidades da 2ª etapa

$$2 \times 3 = 6$$

nº de maneiras diferentes (nº total de possibilidades)

nº possibilidades da 1ª etapa

• ARRANJO SIMPLES

Arranjo simples é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente de outro, pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes.

Ex: Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos 1, 2 e 3?

1 → 2 → 12
1 → 3 → 13

2 → 1 → 21
2 → 3 → 23

3 → 1 → 31
3 → 2 → 32

1º algarismo (3 possibilidades)

2º algarismo (2 possibilidades)

6 números formados

Este é um arranjo de três elementos formados 2 a 2. É representado por:

$$A_{32}$$

Utilizando o princípio fundamental da contagem, tendo n elementos para formar grupos de p elementos ($p \leq n$), temos :

1º algarismo : n possibilidades

2º algarismo : $(n-1)$ possibilidades

3º algarismo : $(n-2)$ possibilidades

pº algarismo : $n-(p-1)$ possibilidades

Então, o número de arranjos simples é dado por:

$$A_{np} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}$$

Utilizando fatorial:

$$A_{np} = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots [n-(p-1)]$$

→ multiplicando e dividindo por $(n-p)!$

$$A_{np} = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$A_{np} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-p+1)\cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{np} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

• PERMUTAÇÕES SIMPLES

Quantos números de 3 algarismos diferentes podemos obter utilizando os números 1, 2, 3 ?

1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321
↓	↓		↓
3 possibilidades	2 possibilidades		6 possibilidades

Então:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Temos que:

Permutação simples é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição e que entram todos os elementos em cada grupo. É indicado por P_n

Fórmula:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

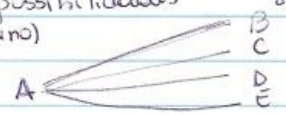
No exemplo temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \longrightarrow 3(3-1) \cdot (3-2) = 6 = 3!$$

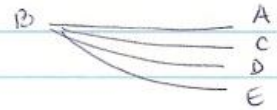
• COMBINAÇÕES SIMPLES

Em uma classe, cinco alunos terão que formar comissões diferentes, de dois alunos cada. Sequem os alunos representados pelas letras A, B, C, D e E, quantas comissões diferentes serão formadas?

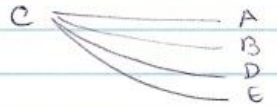
5 possibilidades (1º aluno) — 4 possibilidades (2º aluno)



- AB
- AC
- AD
- AE



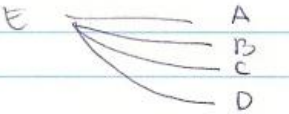
- BA = AB
- BC
- BD
- BE



- CA = AC
- CB = BC
- CD
- CE

- DA = AD
- DB = BD
- DC = CD
- DE

10 comissões possíveis



- EA = AE
- EB = BE
- EC = CE
- ED = DE

Então, combinação simples é agrupamento em que um grupo se diferencia de outro pela natureza dos elementos componentes.
No exemplo, temos grupos chamados de combinação simples dos 5 elementos tomados 2 a 2, indicado por C_{52}.

Temos: Combinação simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. Sua indicação é C_{np}, C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Fórmula:

$$C_{np} = \frac{A_{np}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{np} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Referências Bibliográficas:

- DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações. Volume único. Ed. Ática, 2010
- BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI, José Ruy, GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. Matemática Completa. Volume único. São Paulo. Ed. FTD, 2002.