27/05/14

→ PIBID → Delma J. V. Marques
→ Plano de Aula 3
→ Números complexos

Data: 27/05/14
Bolsista: Delma J. V. Marques
Objetivo: conhecer a história dos números complexos, efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação.
Metodologia: História dos Números Complexos
Introdução:

Estudando os números complexos

Uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da álgebra, a fórmula resolutiva de equações cúbicas de Tartaglia-Cardano, não tinha grandes aplicações práticas, sendo mais eficiente a resolução dessas equações por meio do método de aproximações sucessivas. Porém, do ponto de vista lógico, a fórmula proposta por esses matemáticos trouxe grandes contribuições, promovendo discussões que culminaram no desenvolvimento dos números complexos.

A publicação da fórmula que permite determinar o conjunto-solução de equações cúbicas ocorreu em 1545, na obra "Ars Magna", do matemático Girolamo Cardano (1501-1576), na qual o autor faz referência a um novo tipo de número, que denominou "quantidade fictícia". Tais quantidades eram na realidade raízes quadradas de números negativos, hoje tratadas

como números imaginários.

[...] Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2 = 2$ e $x+2=0$ não são resolíveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^4+1=0$ não é (possível) resolível. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém, com a resolução da equação cúbica, a situação mudou radicalmente. Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula de Cartaglia - Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o valor era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

Conjunto dos Números Complexos

Já estudamos que, no conjunto dos números reais, uma equação do tipo $x^2 + a = 0$, com $a > 0$, possui solução, pois não existe um número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

$$x^2 + a = 0 \Rightarrow x^2 = -a \Rightarrow x = \pm\sqrt{-a}$$

Para solucionar esse tipo de problema, foi estabelecida uma extensão do conjunto dos números reais, obtendo um novo conjunto numérico, denominado dos números complexos, e indicado por $\mathbb{C}$.

→ O conjunto dos nº Complexos $\mathbb{C}$ pode ser definido como o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y) em que estão definidas certas operações.

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de números complexos de modo que seja possível (satisfazer) realizar as operações de adição e multiplicação, além de possibilitar o cálculo da raiz de índice par de números negativos. Uma vez que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, as operações de adição e multiplicação de números reais, quando realizada em $\mathbb{C}$, não sofrem alterações.

"Representação algébrica de um número complexo

Todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser representado algebricamente.

→ Um número complexo z pode ser representado da seguinte maneira:

$$z = x + yi$$

com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, em que i é a unidade imaginária.

Note que um número complexo z, escrito em sua forma algébrica, possui duas partes:

$$z = x + yi$$

parte real de z: $Re(z) = x$

parte imaginária de z: $Im(z) = y$

Em um número complexo, caso a:

- parte imaginária seja nula ($y = 0$), dizemos que o número é real:

$$z = x + 0i \Rightarrow \boxed{z = x}$$

- parte real seja nula ($x = 0$) e a parte imaginária seja não nula ($y \neq 0$), dizemos que o número é imaginário puro:

$$z = 0 + yi \Rightarrow z = yi$$

Ex:

$z = 2 + 5i$: $Re(z) = 2$, $Im(z) = 5$

$z = -6i$: $Re(z) = 0$, $Im(z) = -6$ (nº imaginário puro)

$z = \frac{1}{2}$; $Re(z) = \frac{1}{2}$, $Im(z) = 0$ (nº real)

A unidade imaginária i é que indica a raiz de índice par de um nº negativo no conjunto $\mathbb{C}$.

Ex:

1) Na equação $x^2+9=0$, temos:

$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x=\pm\sqrt{9(-1)}$

$x=\pm\sqrt{9i^2} = x=\pm 3i \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3 \end{cases}$

2) Em $\mathbb{C}$, o conjunto solução da equação $x^2-6x+10=0$ é igual a:

a) $S=\{3i, -3i\}$ b) $S=\{3+i, 3-i\}$ c) $S=\{i-3, i+3\}$

d) $S=\{3+i, -3+i\}$ e) $S=\{3-i, -3-i\}$

Utilizando a fórm. resolutiva temos:

$a=1 \quad b=-6 \quad c=10$

$\Delta=(-6)^2-4.1.10=-4$

$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{-4}}{2.1} = \frac{6\pm\sqrt{4.(-1)}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4i^2}}{2}$

$= \frac{6\pm 2i}{2} \begin{cases} x_1 = 3+i \\ x_2 = 3-i \end{cases}$

Portanto, $S=\{3+i, 3-i\}$.

"Operações com números complexos"
Adição, subtração e multiplicação"

Na adição de dois números complexos, adicionamos separadamente as partes reais e as partes imaginárias. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = -1+2i$ e $z_2 = 3+4i$, calculamos z_1+z_2:

$$z_1+z_2 = \underbrace{(-1+2i)}_{z_1} + \underbrace{(3+4i)}_{z_2} = (-1+3)+(2+4)i \Rightarrow z_1+z_2 = \Rightarrow 2+6i$$

Em relação à adição de números complexos, destacamos a propriedade do elemento oposto.

Para cada número complexo z_1, existe um número oposto z_2, também complexo, tal que:

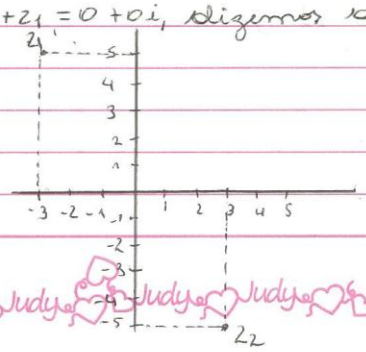
$$z_1+z_2 = z_2+z_1 = 0+0i$$

Ex:

Considere os nºs complexos $z_1 = -3+5i$ e $z_2 = 3-5i$. Calculando $z_1+z_2 = z_2+z_1$, temos:

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$
$$(-3+5i)+(3-5i) = (3-5i)+(-3+5i)$$
$$(-3+3)+(5-5)i = (3-3)+(-5+5)i$$
$$0+0i = 0+0i$$

Como $z_1+z_2 = z_2+z_1 = 0+0i$, dizemos que esses números são opostos.



Para realizar a subtração de dois números complexos, subtraímos separadamente as partes reais e as partes imaginárias. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = 1+4i$ e $z_2 = 2-2i$, calculamos $z_1 - z_2$:

$$z_1 - z_2 = \underbrace{(1+4i)}_{z_1} - \underbrace{(2-2i)}_{z_2} = 1+4i-2+2i$$
$$= (1-2)+(4+2)i$$
$$= z_1 - z_2 = -1+6i$$

Na multiplicação de dois números complexos, aplicamos a propriedade distributiva e reduzimos os termos semelhantes. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = 2+2i$ e $z_2 = \frac{1}{2}+3i$, calculamos $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{(2+2i)}_{z_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}+3i\right)}_{z_2} = 1+6i+i+\underbrace{6^2}_{-1} =$$
$$= 1+6i+i-6$$
$$= z_1 \cdot z_2 = -5+7i$$

Considerando os nºs complexos $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, com a, b, c e d reais, temos:

- Adição $\rightarrow$ $z_1+z_2 = (a+bi)+(c+di) \Rightarrow z_1+z_2 = (a+c)+(b+d)i$

- Subtração $\rightarrow$ $z_1-z_2 = (a+bi)-(c+di) \Rightarrow z_1-z_2 = (a-c)+(b-d)i$

- Multiplicação $\rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = (a+bi).(c+di) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Conjugado

O conjugado do número complexo $z = x + yi$, indicado por $\bar{z}$, é dado por $\bar{z} = x - yi$. Note que obtemos $\bar{z}$ trocando o sinal da parte imaginária z.

Exemplos:

$z = 8 + 15i \Rightarrow \bar{z} = 8 - 15i$

$z = \frac{2}{5} - i \Rightarrow \bar{z} = \frac{2}{5} + i$

$z = 9i \Rightarrow \bar{z} = -9i$

$z = 12 \Rightarrow \bar{z} = 12$

Uma das propriedades do conjugado é que o produto entre um número complexo e seu conjugado é sempre um número real não negativo.

Calculando o produto entre $z = x + yi$ e seu conjugado $\bar{z} = x - yi$, temos:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

Portanto, o produto $z \cdot \bar{z}$ é igual ao quadrado da parte real mais o quadrado da parte imaginária de z.

Ex:

1) $z = -2 + 5i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (-2)^2 + 5^2 = 29$

2) $z = -3 - i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$

Divisão

O quociente entre dois números complexos z_1 e z_2, com $(z_2 \neq 0)$, pode ser obtido multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor, isto é:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2}$$

Ex.:

1) Considerando os números complexos $z_1 = -6+9i$ e $z_2 = 2+4i$, e calculando $\frac{z_1}{z_2}$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2} = \frac{(-6+9i) \cdot (2-4i)}{(2+4i) \cdot (2-4i)} = \frac{-12+24i+18i-36\overset{-1}{i^2}}{2^2+4^2}$$

$$= \frac{24+42i}{20} = \frac{6}{5} + \frac{21}{10}i$$

2) Escreva na forma $z = a+bi$ o número complexo $\frac{1-i}{1+i} + \frac{2+i}{3i}$

Desenvolvendo cada divisão temos:

* $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+i^2}{1-i+i-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = 1$

* $\frac{2+i}{3i} = \frac{2+i}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} = \frac{-6i-3i^2}{-9i^2} = \frac{3-6i}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

Logo:

$$\frac{1-i}{1+i} + \frac{2+i}{3i} = -i + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$$

Potenciação de i

Sabendo que $i^2 = -1$ e utilizando as propriedades de potenciação conhecidas em $\mathbb{R}$, podemos calcular os valores de i^n com $n \in \mathbb{N}$.

Calculando i^n para $0 \leq n \leq 11$, temos:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
- $i^9 = i^8 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
- $i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Note que os valores de i^n se repetem de 4 em 4, ou seja:

- $i^0 = i^4 = i^8 = 1$
- $i^1 = i^5 = i^9 = i$
- $i^2 = i^6 = i^{10} = -1$
- $i^3 = i^7 = i^{11} = -i$

Essas ocorrências são válidas para todo n natural. Assim, temos $i^n = i^r$, em que r é o resto da divisão de n por 4.

Ex.:

1) Calculando i^{50} e i^{107}, temos:

• i^{50}

$$\begin{array}{r|l} 50 & 4 \\ -4 & 12 \\ \hline 10 & \\ -8 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto $\therefore i^{50} = i^2 = -1$

• i^{107}

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ -8 & 26 \\ \hline 27 & \\ -24 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto $\therefore i^{107} = i^3 = -i$

2) Determine o valor da expressão $i^{17} + 3i^{288} - 2i^{95} + i^{-30}$.

• i^{17}

$$\begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ -16 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto $\therefore i^{17} = i^1 = i$

• i^{288}

$$\begin{array}{r|l} 288 & 4 \\ -28 & 72 \\ \hline 008 & \\ -8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto $\therefore i^{288} = i^0 = 1$

• i^{95}

$$\begin{array}{r|l} 95 & 4 \\ -8 & 23 \\ \hline 15 & \\ -12 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto

$\therefore i^{95} = i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$

$\cdot\ i^{-30} =$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline -28 & 7 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto $\therefore\ i^{-30} = (i^{30})^{-1} = (i^2)^{-1} = -1$

Assim:

$$i^{17} + 3i^{288} - 2i^{95} + i^{-30} = i + 3 \cdot 1 - 2(-i) + (-1) =$$
$$i + 3 + 2i - 1 = 2 + 3i$$

Módulo de um número complexo.

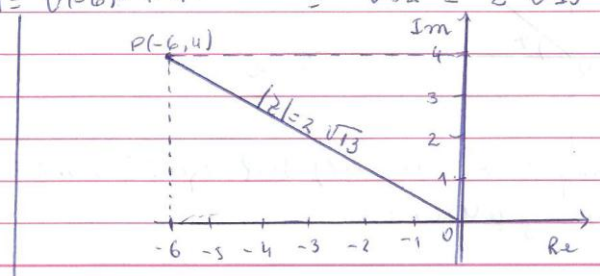
Podemos definir geometricamente o módulo de um número complexo $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, como a distância entre a origem O do sistema de coordenadas cartesianas e o ponto $P(x, y)$.

Algebricamente, indicamos o módulo do número complexo z por $|z|$ e o definimos como:

$$(OP)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow OP = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ex.: Calculando o módulo do número complexo $z = -6 + 4i$, temos:

$$|z| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

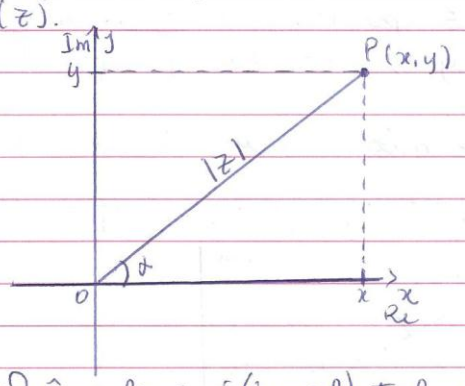


Em relação ao módulo de nºs complexos, destacamos as seguintes propriedades que podem ser demonstradas:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2 \neq 0$

Representação trigonométrica de um número complexo.

Na representação geométrica do número complexo $z = x + yi$, com $z \neq 0$, podemos destacar o ângulo α formado entre o segmento (de reta) OP e o eixo real, medido do sentido anti-horário. Esse ângulo é denominado argumento de z (ou argumento principal de z) e é indicado por $\arg(z)$.



O ângulo α é (igual) tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$ e satisfaz as igualdades:

- $\cos \alpha = \dfrac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos \alpha$

- $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

Substituindo esses valores na forma algébrica de um número complexo, obtemos a forma trigonométrica (ou forma polar) do número complexo.

$$z = x + yi \Rightarrow z = |z| \cdot \cos \alpha + |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot i$$
$$z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Ex.

1) Escreva na forma trigonométrica e represente geometricamente os números complexos:

a) $z = 4 + 4i$

Inicialmente calculamos o módulo de z.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

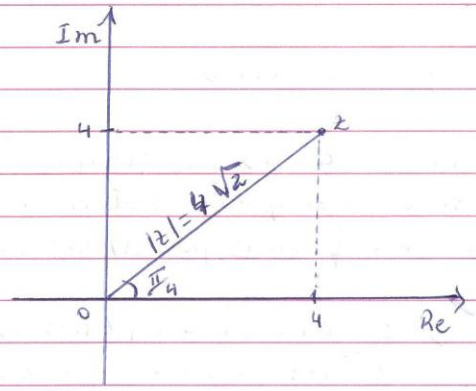
Em seguida, calculamos o argumento de z.

$$\cos \alpha = \frac{x}{|z|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{|z|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4} = 45°$, Portanto, a forma trigonométrica de z é:

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right).$$



Multiplicação e Divisão.

Considere os números complexos $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$ na forma trigonométrica: Calculando o produto $z_1 \cdot z_2$, temos:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1) \cdot |z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\,\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + i(\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2)]$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\,\text{sen}\,(\alpha_1+\alpha_2)]$

De maneira geral, para n números complexos:

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \ldots |z_n|[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n) + i\,\text{sen}\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_n)]$

. Divisão de números complexos na forma trigonométrica.

Podemos calcular o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, com $z_2 \neq 0$, da seguinte maneira:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

→ O produto entre dois números complexos z_1 e z_2 na forma trigonom. é o nº complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2, e o argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

→ O quociente entre dois nºs complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2, e o argumento é igual à diferença, na ordem dada, dos argumentos de z_1 e z_2.

Ex. 1) Dados os números complexos $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$, calcule:

a) z_1^2

$$z_1^2 = z_1 . z_1 = 6 . 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 36\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right]$$

b) $z_1 . z_2$

$$z_1 . z_2 = 6 . 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{11\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 12\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right) = 12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

390°

30°

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right)\right]$

$= 3\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] \rightarrow 270°$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 90°$

→ Note que os ângulos de $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$ são côngruos, respectivamente, aos ângulos de $\frac{13\pi}{6}$ e $-\frac{3\pi}{2}$.

Radiciação de Números complexos na forma trigonométrica.

As operações com números complexos na forma trigonométrica facilitam o cálculo envolvendo os elementos desse conjunto. Multiplicação e divisão de complexos que estão na forma trigonométrica são feitos quase que instantaneamente, enquanto que na forma algébrica o processo requer mais cálculos. A potenciação e a radiciação de complexos na forma trigonométrica também ficam facilitadas com a utilização das fórmulas de Moivre. Vejamos como se procede a radiciação desses números:

Considere um número complexo qualquer $z = a + bi$. A forma trigonométrica de z é:

$$z = |z| (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

As raízes de índice n de z são dadas pela segunda fórmula de Moivre:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]; \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

Ex.: 1) Determine as raízes quadradas de $2i$.

Solução: Primeiro devemos escrever o número complexo na forma trigonométrica. Todo do número complexo é da forma $z = a + bi$. Assim, temos que:

$$z = 2i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Sabemos também que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{2} = 0$$

Com os valores de seno e cosseno podemos concluir que: $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$, Assim, a forma trigonométrica de $z = 2i$ é:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Agora, vamos calcular as raízes quadradas de z utilizando a formula de Moivre.

$$z_k = \sqrt[2]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.k.\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.k.\pi}{2}\right)\right]; \; k \in \{0,1\}$$

Como queremos as raízes quadradas de z, obteremos duas raízes distintas z_0 e z_1.

Para $k=0$, teremos:

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.0.\pi}{2}\right) + i.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.0.\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Para $k=1$, teremos:

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.1.\pi}{2}\right) + i.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2.1.\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]\right)$$

ou

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$