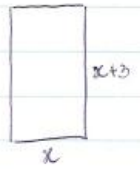
PLANO DE AULA: CLARICE F. VIVIAN

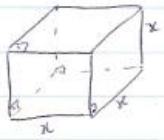
POLINÔMIOS

Introdução:

Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitam depois a resolução do problema, por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas.

Por exemplo, digamos que a leitura dos enunciados dos problemas nos levem à seguintes figuras e suas dimensões:





← é um cubo de aresta x cuja area total é indicada por: $6x^2$

e seu volume: x^3

Podemos escrever seu Perímetro como:

$2x + 2(x+3)$ ou

$4x + 6$

E a sua área como:

$x(x+3)$ ou

$x^2 + 3x$

Definição:

Chamamos de EXPRESSÃO POLINOMIAL ou POLINÔMIO na variavel complexa x toda a expressão na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + \underset{\text{termo indep.}}{a_0}$$

onde:

→ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ → COEFICIENTES (nºs complexos)

→ n é um nº positivo ou nulo

→ o maior expoente de x, com coeficiente não nulo é o GRAU DA EXPRESSÃO

Ex:

1) $4x + 6$ → 1º grau (ou grau 1)

2) $x^2 + 3x$ → 2º grau (ou grau 2)

3) x^3 → 3º grau (ou grau 3)

Não são expressões polinomiais:

1º) $x^{-2} + 3x^{-1}$ → pois expoente de x não pode ser negativo

2º) $x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ → pois x não pode estar no denominador.

3º) $x^{2/3} + x + 6$ → pois o expoente de x não pode ser fracionário

4º) $\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 2$ → pois x não pode aparecer sob o radical.

$x^{1/3}$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

FUNÇÃO POLINOMIAL:

Denomina-se a função p de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, definida por:

$$p(x) = \underbrace{a_n x^n}_{\text{termo}} + \underbrace{a_{n-1} x^{n-1}}_{\text{termo}} + \underbrace{a_{n-2} x^{n-2}}_{\text{termo}} + \dots + \underbrace{a_2 x^2}_{\text{termo}} + \underbrace{a_1 x}_{\text{termo}} + \underbrace{a_0}_{\text{termo}}$$

Com:

→ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ e a_n → (coeficientes) pertencentes a $\mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

→ cada função polinomial associa-se a uma única expressão polinomial.

→ x é a variável

→ cada parcela da expressão é denominada TERMO, sendo a_0 o termo independente.

Se tem, o polinômio:

1 termo → MONÔMIOS

2 termos → BINÔMIOS

3 termos → TRINÔMIOS

Ex:

→ $x^5 + 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 3x - 8$ $\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_4 = 0 \\ a_3 = 2 \\ a_2 = -1/3 \\ a_1 = 3 \\ a_0 = -8 \end{cases}$ → não tem x^4 na expressão

→ $2x^2 - 5x + 1$ → trinomio $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_1 = -5 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

→ $p(x) = 5$ → polinomio de grau 0 → polinomio constante

Não são exemplos

$x^{-2} + 5$ → pois expoente de x negativo

$x^5 + 2x^{1/2}$ → pois expoente é fracionário

/ / *

GRAU DO POLINÔMIO → é definido pelo maior expoente da variável dentre os termos de coeficientes não nulos.

No polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$ temos que o grau do polinômio é n indicado por:

$$gr(p) = n$$

Dizemos ainda que neste caso, a_n é o coeficiente dominante de $p(x)$

Ex:

- $2x^7 - x^6 + x^2 - 5x + 7$ → grau: 7, coeficiente dominante: 2.
- $-\frac{2}{5}x^{11} + x^{10} - 6x^3$ → grau 11, coef. dominante: $-2/5$

1º POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO: (P_{in})

É assim definido o polinômio que possui todos os coeficientes nulos.

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

Indicamos.

$p(x) = 0$, lê-se: $p(x)$ é idêntico a zero.

VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Dado um polinômio $p(x)$ e um número real α, o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$, representado por $p(\alpha)$ é obtido substituindo-se x por α e realizando os devidos cálculos.

De modo geral:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha^1 + a_0$$

→ Quando o valor numérico é igual a zero, temos $p(\alpha) = 0$, em que $x = \alpha$, e dizemos que α é a <u>raiz</u> do polinômio.

Ex

$p(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 - x$, com $x = -2$

$p(-2) = \underbrace{2(-2)^5}_{-64} + (-2)^4 - 2(-2)^2 - (-2)$

$-64 + 16 - 8 + 2 = -54$

Para $x = -1/2$

$p(-1/2) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + (-1/2)^4 - 2(-1/2)^2 - (-1/2)$

$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ //

Para $x = 1$

$p(1) = 2.1^5 + 1^4 - 2.1^2 - 1 = 2 + 1 - 2 - 1 = 0$ //

Como:
$p(-\frac{1}{2}) = 0$
$p(1) = 0$
$p(0) = 0$
temos que $-1/2$, 1 e 0 são raízes do polinômio
$p(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 - x$

Para $x = -1$ → $2.(-1)^5 + (-1)^4 - 2.(-1)^2 - (-1) = -2 + 1 - 2 + 1 = -4 + 2 = -2$

Para $x = 0$ → $2(0)^5 + (0)^4 - 2(0)^2 - (0) = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$ //

Para $x = 2$ → $2(2)^5 + (2)^4 - 2(2)^2 - 2 = 64 + 16 - 8 - 2 = 70$

Dizemos que dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios idênticos se, e somente se, todos os coeficientes de $p(x)$ são iguais aos respectivos coeficientes de $q(x)$.

Indica-se:

$$p(x) \equiv q(x)$$

Ex:

$p(x) = -x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 4$ e

$q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

temos $p(x) \equiv q(x)$ se:

$a = -1$, $d = 3$

$b = 1/4$ $e = 1$

$c = -5$ $f = -4$

Operações com polinômios

Adição:

Sendo:

$p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e

$q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, temos $p(x) + q(x)$:

$$(3x^2 + 2x - 1) + (-x^3 + 4x^2 - 2x - 5) =$$
$$3x^2 + 2x - 1 - x^3 + 4x^2 - 2x - 5 =$$
$$-x^3 + (3+4)x^2 + (2-2)x + (-1-5) =$$
$$-x^3 + 7x^2 - 6$$

(soma os termos semelhantes)

Subtração:

Sendo:

$p(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$q(x) = 5x^2 - 3x + 4$

Temos $p(x) - q(x) = (3x^2 - 4x + 1) - (5x^2 - 3x + 4)$

$$= 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4$$
$$= (3-5)x^2 + (-4+3)x + (1-4)$$
$$-2x^2 - x - 3$$

Multiplicação:

a) Multiplicação de um polinômio por uma constante

Multiplica-se cada termo do polinômio pela constante; aplica-se a propriedade distributiva.

Ex: Sendo $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos

$$7p(x) = 7(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)$$

$$7\,p(x) = 14x^3 - 28x^2 + 35x - 21$$

b) Multiplicação de polinômios

Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

Ex: Sendo:

$p(x) = 3x - 4$ e

$q(x) = -2x + 5$ temos:

$$p(x) \cdot q(x) = (3x - 4) \cdot (-2x + 5)$$

$$= -6x^2 + 15x + 8x - 20$$

$$= -6x^2 + 23x - 20$$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dados dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não-nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ que satisfaçam as seguintes condições.

1º) $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$

2º) o grau de $r(x)$ não pode ser igual nem maior do que o grau de $h(x)$ ou então $r(x) = 0$

Assim:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

$p(x)$ → dividendo

$h(x)$ → divisor

$r(x)$ → resto

$q(x)$ → quociente

Ex: $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$

$h(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Calcular $p(x) : h(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 & 2x^2 + 4x - 3 \\
\hline
-2x^4 - 4x^3 + 3x^2 & x^2 - 3x + 1 \\
\quad -6x^3 - 10x^2 + 10x - 1 & \\
\quad +6x^3 + 12x^2 - 9x & \\
\qquad 2x^2 + x - 1 & \\
\qquad -2x^2 - 4x + 3 & \\
\qquad\quad -3x + 2 &
\end{array}
$$

Verificando

$q(x)\, h(x) + r(x)$:

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 3x + 1 \\
\times \; 2x^2 + 4x - 3 \\
\hline
2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \\
\quad + 4x^3 - 12x^2 + 4x \\
\qquad - 3x^2 + 9x - 3 \\
\hline
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \\
+ \qquad\qquad - 3x + 2 \\
\hline
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 \longrightarrow p(x)
\end{array}
$$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS POR BINÔMIOS DO TIPO $x-a$

Na divisão de polinômios, o resto deve ser nulo ou seu grau deve ser menor que o grau do divisor. Se o seu divisor é do tipo $x-a$, com $a \in C$ e grau a 1, o resto é zero ou tem grau igual a zero. Portanto, conclui-se que o resto da divisão é independente da variável x, ou seja, uma constante r.

Assim: $p(x) : h(x) = x-a$ temos:

$$p(x) = (x-a).q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, e calculando $p(a)$, obtemos:

$$p(a) = \underbrace{\underbrace{(a-a)}_{0} . q(a)}_{0} + r \Rightarrow p(a) = r$$

Este resultado é conhecido como Teorema do Resto

Ex: Determinar o resto r da divisão de $p(x) = 2x^4+5x^3-x^2+8$ por $h(x) = x+2$.

$a = -2$, temos:

$x-a$
$x-(-2)$

$$p(-2) = 2.(-2)^4 + 5(-2)^3 - (-2)^2 + 8 = 32 - 40 - 4 + 8 = -4$$

Como $p(a) = r \rightarrow p(-2) = \underline{-4}$

O resto desta divisão é $r = -4$

O valor de a corresponde à raíz do binômio $h(x) = x-a$

No exemplo: $x-a \rightarrow x = a \rightarrow x = -2$

Uma importante consequência do Teorema do Resto é o Teorema de d'Alambert, assim enunciado:

"Sendo a uma constante qualquer, um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$ se, e somente se, a é raíz de $p(x)$, ou seja, $p(a)=0$"

Ex:

1) Verificar se $p(x) = -x^5+4x^4+2x^3-5x^2-13x+4$ é divisível por $h(x) = x-4$

$a=4$, temos

$p(a) = -(4)^5+4(4)^4+2(4)^3-5(4)^2-13(4)+4 =$

$= -1024+1024+128-80-52+4 = 0$

Portanto $p(4)=0$, podemos afirmar que $p(x)$ é divisível por $h(x)$.

2) Calcular o resto de $p(x) = 2x^3-x^2+5x-3$ por $h(x) = x-4$ de acordo com o teorema de d'Alambert:

$a=4$ $\quad p(4) = 2.(4)^3-(4)^2+5(4)-3 = 128-16+20-3 = 129$

$p(4) = 129$, como $p(a) = r$

o resto é 129

3) Determinar o valor de a:

$p(x) = 2x^3+5x^2-ax+2$ é divisível por $h(x) = x-2$

→ Se $p(x)$ é divisível por $h(x)$, então o resto da divisão é zero

$p(2) = 2(2)^3+5(2)^2-a.(2)+2 = 0 \Rightarrow 16+20-2a+2 = 0$

$38-2a = 0 \rightarrow 38 = 2a$

$a = \frac{38}{2} \rightarrow a = 19$

Divisão por $(x-a)$: dispositivo prático Briot-Ruffini

termo constante do divisor com sinal trocado	coeficientes de x do dividendo $p(x)$	termo constante do dividendo $p(x)$
	coeficientes do quociente.	resto

Ex: $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$

$h(x) = x - 2$

1º → verificar se $p(x)$ está em ordem decrescente quanto às potências de x. Se $p(x)$ possui coeficiente igual a zero, completá-lo na tabela (ex. 2)

1º)

+2	3	-5	1	-2

2º)

2	3	-5	1	-2
	↓			
	3			

(repetimos o 1º coef. do dividendo

3º)

2	3	-5	1	-2
	↓	6+(-5)		
	3	1		

$3 \times 2 = 6$

Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

4º)

2	3	-5	1	-2
	↓	6+(-5)	2+1	
	3	1	3	

Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente

5º)

2	3	−5	1	−2
	↓	6+(−5)	2+1	6+(−2)
	3	1	3	4

Temos:

quociente $= 3x^2 + x + 3$ e resto $= 4$

logo $3x^3 - 5x^2 + x - 2 = (x-2)(3x^2+x+3) + 4$

→ Na divisão por $x-a$ o resto sempre é uma constante, pois $x-a$ é um polinomio de 1º grau

2) $p(x) = 2x^5 + 1x^4 + \underline{0x^3} - 3x^2 - x + 5$

$h(x) = x + 2$

−2	2	1	0	−3	−1	5
	↓	−4+1	6+0	−12−3	30−1	−58+5
	2	−3	6	−15	29	−53

Dessa divisão obtemos o quociente:

$2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 15x + 29$ e resto $= -53$

EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

É dita equação polinomial ou algébrica toda a equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (\text{com } a_n \neq 0)$$

em que a_i (a_n, a_{n-1} ... a_2, a_1, a_0) são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in \mathbb{N}$ e n é o grau da equação.

Ex:

1º) $3x + 1 = 0$ → eq. algébrica de 1º grau

2º) $x^2 - 3x - 4 = 0$ → eq. algébrica de 2º grau

3º) $x^4 - 8x = 0$ → eq. algébrica de 4º grau

$p(x)$ → grau $n \geq 1$

O grau e as raízes de uma equação polinomial $p(x) = 0$ são, respectivamente, iguais ao grau e às raízes do polinômio $p(x)$.

Ex: $2x^2 - 5x - 3$ $\begin{cases} \text{grau: } 2 \\ \text{raízes: } -\frac{1}{2} \text{ e } 3 \end{cases}$ (por báskara)

/ /

Raíz de uma equação polinomial

O valor α de x que satisfaz a igualdade:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha^1 + a_0 = 0$$

Por exemplo:

$x^2 - 7x + 10 = 0$, admite $x = 5$ como raíz; pois:

$$(5)^2 - 7(5) + 10 = 0$$
$$25 - 35 + 10 = 0$$
$$0 = 0$$

Denomina-se "Conjunto Solução" o conjunto das raízes da equação.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ALGEBRA

"Toda a equação algebrica $p(x) = 0$ de grau n $(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raíz complexa (real ou não)

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES DE 1º GRAU.

Utilizando o Teorema fundamental da Álgebra podemos demonstrar que:

Todo polinômio

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau:

$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.

$p(x) \rightarrow$ 1 raíz (r_1)

$p(r_1) = 0$ é divisível por $x - r_1$:

Por Teorema d'Alembert

$$p(x) = (x - r_1) \cdot \underbrace{q_1(x)}_{\rightarrow\, q_1(x) = n-1} \quad \text{I}$$

caso $n-1 \geq 1$, de acordo c/o Teorema Fundamental, admite pelo menos 1 raiz r_2:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot \underbrace{q_2(x)}_{\rightarrow\, q_2(x) = n-2} \quad \text{II}$$

Subst. II em I

$$p(x) = (x - r_1)\,\overbrace{(x - r_2)\, q_2(x)}$$

Realizando esse procedto n vezes:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_{n-2})(x - r_{n-1})(x - r_n)$$

$r_1, r_2, r_3 \dots r_{n-2}\ r_{n-1}, r_n \rightarrow$ são raízes do polinômio

Naturalmente:

$p(x) = 0 \rightarrow a_n(x-1)(x-2)(x-3)\cdot \ldots \cdot(x-x_n) = 0$

· Ou seja, toda a equação polinomial de grau n tem n raízes complexas. (não necessariamente distintas)

Ex: Escreva o polinomio $p(x)$ de raízes:
-1, $2+i$ e $2-i$, tal q $p(2) = 9$

$p(x) = a_n[(x-(-1)][x-(2+i)][x-(2-i)]$

$p(x) = a_n(x+1).(x-2-i).(x-2+i)$

$p(x) = a_n(x+1)(x^2-4x+5)$

$p(x) = a_n(x^3-3x^2+x+5)$

$x^2-2x-\cancel{xi}-2x+4-\cancel{2i}$
$-\cancel{xi}+\cancel{2i}-\underbrace{i^2}_{-1}$
$+1$
$= x^2-4x+5$

Como $p(2) = 9$

$p(2) = 9 \rightarrow a_n(2^3-3(2)^2+2+5) = 9$

$a_n \cdot 3 = 9$

$a_n = \frac{9}{3} \rightarrow a_n = 3$

Portanto:

$p(x) = 3(x^3-3x^2+x+5)$

$\boxed{p(x) = 3x^3-9x^2+3x+15}$

2) Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1.

Se 1 é raíz de $p(x) = 0$, temos:

$p(x) = (x - 1)\, q_1(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$

Observando que o grau de $q_1(x)$ é 2 e sabendo resolver a equação de 2º grau, podemos dizer que $q_1(x) = 0$ fornece as outras raízes.

Determinação de $q_1(x)$

1	2	-4	-2	4
	2	-2	-4	0

$q_1(x) = 2x^2 - 2x - 4$, por baskara

$x = \frac{2 \pm 6}{4}$ $\quad x' = \frac{2+6}{4} = 2$ $\quad x'' = \frac{2-6}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$S = \{-1, 1, 2\}$

Referências Bibliográficas:

- DANTE, Luiz Roberto. Matemática contexto e aplicações. Volume Único. Ed. Ática, 2010.

- BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI, José Ruy. GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. Matemática completa. Volume único. São Paulo. Ed. FTD, 2002.