DIMENSÃO ESTRUTURAL DA ÁLGEBRA: ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS E AS POTENCIALIDADES DO ALGEPLAN

Andressa de Siqueira Cereta
Universidade Federal do Pampa
andressa.s.cereta@gmail.com

Alessandra Lucero da Silva
Universidade Federal do Pampa
alelucero182@gmail.com

Tanara da Silva Dicetti
Instituto Federal Farroupilha
tanarasdicetti@gmail.com

Maria Arlita da Silveira Soares
Universidade Federal do Pampa
arlitasoares@gmail.com

Eixo Temático: E3 – Pesquisa em Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Resumo

O presente artigo intenta analisar como é apresentado em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos) aprovada pelo PNLD/2014 (BRASIL, 2013) o estudo da dimensão Estrutural, a partir das ideias de Usiskin, Branco e Duval, assim como as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN. A opção teórico-metodológica adotada é de cunho qualitativo, todavia, dados quantitativos foram produzidos no intuito de elucidar as produções da pesquisa, na qual foi realizada uma análise de livros didáticos no que tange a dimensão Estruturada Álgebra, além de uma discussão sobre as potencialidades do uso do material manipulável Algeplan nesse estudo. As conclusões permitem considerar que o estudo da dimensão Estrutural por meio desta coleção é significativa, potencializando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Dimensão Estrutural da Álgebra. Registro de Representação Semiótica. Materiais Manipuláveis. Livro Didático.

1 Introdução

Esta pesquisa está vinculada ao grupo de pesquisa matE² (Matemática e Educação Matemática) e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência PIBID/Subprojeto Matemática. O grupo de pesquisa matE² tem como meta problematizar dimensões subjacentes às temáticas currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e "formação" de professores. A interlocução entre os níveis Educação Superior e Educação Básica é inerente aos diálogos no grupo, uma vez que o trabalho desdobra-se com a participação de professores universitários, professores da Educação Básica e acadêmicos da graduação ao doutorado.

Neste sentido, objetiva-se analisar como é apresentado, em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos) aprovada pelo PNLD/2014 (BRASIL, 2013), o estudo da dimensão estrutural da Álgebra. Para tanto, analisou-se como são propostos, ao estudante, os conteúdos monômios, polinômios e produtos notáveis, bem como verificar como são abordados, no que tange a grau do monômio/polinômio, representação, operações envolvidas e recursos tecnológicos.

A compreensão da dimensão estrutural da Álgebra, realizada nesta pesquisa, baseia-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) e em Usiskin (1995) os quais inferem a Álgebra como sendo o estudo das estruturas, através das propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios, com ênfase nas operações algébricas e expressões, em que as variáveis são tratadas como sinais, sem qualquer referência numérica.

Usiskin (1995) enfatiza as contribuições dos estudos relacionados com as diferentes dimensões da Álgebra, pois as peculiaridades de cada dimensão revelam os diversos usos e abordagens da simbologia e permitem ao professor desenvolver um trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Buscou-se, também, aporte teórico nas ideias de Branco (2008) que destaca as dificuldades apresentadas por estudantes na manipulação de letras e atribuição de significado à simbologia formal da Álgebra. Percebe-se que estas dificuldades persistem no Ensino Médio estendendo-se ao Ensino Superior.

Considera-se que as escolhas metodológicas e didáticas, adotadas pelos professores, para o ensino de Álgebra influenciam no desenvolvimento do pensamento algébrico do estudante. Visto que, as escolhas feitas pelo professor é que determinarão, de certa maneira, a qualidade da aprendizagem dos estudantes (BRASIL, 1998).

Ainda, conforme os PCN (BRASIL, 1998) para uma "correta" tomada de decisões sobre o ensino de Álgebra é necessário ter clareza sobre o papel deste campo no currículo, além de uma reflexão de como o estudante apropria-se do conhecimento matemático. Para tanto, busca-se aporte teórico nas ideias de Duval (2003, 2011) no que tange a importância das Representações Semióticas para a aprendizagem em Matemática.

Sabe-se que o livro didático é um dos recursos mais utilizados para a elaboração e desenvolvimento das atividades docentes. Assim, torna-se essencial a análise deste recurso, em particular, acerca das dimensões da Álgebra e as representações semióticas associadas a este campo da matemática. Além disso, é aconselhável que as salas de aula sejam equipadas com materiais manipuláveis, pois as crianças são indivíduos ativos que constroem, modificam e integram ideias interagindo com o mundo real, exigindo investigações em relação aos limites e potencialidades do uso desses materiais.

2 Álgebra e suas dimensões: Um olhar para a dimensão Estrutural

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115)

A epígrafe acima caracteriza a importância do estudo da Álgebra pela compreensão do significado de simbolismo e desenvolvimento da capacidade de abstração desde os anos iniciais da Educação Básica até o Ensino Médio.

Segundo Branco (2008), o início da aprendizagem da Álgebra exige um grau de abstração e capacidade de (re)significar a manipulação de símbolos usados na Aritmética. Para muitos estudantes a aprendizagem da Álgebra é mecânica e desprovida de sentido. Isto acontece, principalmente, porque os estudantes entendem que os mesmos símbolos usados neste campo possuem o mesmo significado que em outros campos da Matemática (por exemplo, Aritmética), embora isso nem sempre seja verdade.

É importante, então, salientar que há diferenças no sentido em que as letras são empregadas. Na aritmética as letras *m* e *l* podem representar unidades de medida, como metros e litros e na Álgebra *m* e *l* representam uma variável, ou seja, quantidade de metros e quantidade de litros. A percepção das peculiaridades da transição entre os campos da Matemática, a exemplo: da Aritmética para a Álgebra, é um indício do desenvolvimento do pensamento algébrico (BRANCO, 2008).

Para Ponte (2009), o desenvolvimento do pensamento algébrico é um tema amplamente problematizado na Educação Matemática, pois possibilita a interpretação e a resolução de problemas referentes à própria matemática e a outros campos da matemática. Para Kaput (apud PONTE, 2009) esse pensamento revela-se quando através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais e estas generalizações podem ocorrer em qualquer conceito matemático trabalhado desde os anos iniciais de escolaridade.

Van de Walle (2009) explicita que o pensamento algébrico envolve explorar, entre outros, o conceito de função por meio da análise de padrões, o que permite abstrair e representar, capacidades fundamentais para a aprendizagem matemática. Afirma também que desenvolver o pensamento algébrico é entender como este raciocínio está presente no mundo real e como se relaciona com outros campos da Matemática.

Para potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) sugerem a abordagem de quatro Dimensões da Álgebra, conforme explicitadas e exemplificadas no quadro 1.

Quadro 1: Dimensões da Álgebra

Dimensões da Álgebra	**Aspectos relevantes**	**Exemplo**
Aritmética Generalizada	As letras são generalizações	-Formula da área e do perimetro das figuras planas; Quadrado: área, $A = l^2, l \in R_+$, perimetro $P = 4l, l \in R_+$. -Propriedade das operações; Adição, comutativa: $x + y = y + x$. -Representação do número impar: $2k + 1$.
Funcional	As letras são variaveis, possuem relação de dependência.	-Variação figural; Quadrado: -Variação numérica; 1^2 | 2^2+1 | 3^2+5 | ? 1 | 5 | 14 | ... -Grandezas; Valor do quilo de determinada fruta e a quantidade de Kg da mesma.
Equacional	As letras são incognitas, possuem valores especificos que satisfazem a equação.	-Equação: $3b - 5 = 10$; $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$
Estrutural	As letras são simbolos abstrato.	-Produtos notáveis: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Fonte: Adaptado de Brasil (1998)

Segundo os PCN (BRASIL, 1998) na dimensão Aritmética Generalizada as variáveis assumem como o próprio nome indica a função de generalizar, visto que, as letras substituem um valor numérico. Na dimensão Funcional as variáveis apresentam uma relação de dependência entre si, não assumindo um valor específico, podendo, então, ser entendida como um modelo matemático que representa situações-problema concretas. A resolução de equações nas quais as letras assumem a função de incógnitas, ou seja, tem a finalidade de determinar um valor específico para a equação está categorizada na dimensão Equacional. Já a dimensão Estrutural, segundo Usiskin (1994), consiste nas estruturas que fundamentam a escrita algébrica, explicando conceitos e propriedades do objeto matemático.

Na dimensão Estrutural as variáveis são consideradas objetos arbitrários da Álgebra Abstrata, assim, não assumem nenhum valor numérico e não são representadas por meio de um gráfico, mas podem ser manipuladas de forma a transformarem-se em expressões mais simples, porém, equivalentes. Neste tipo de problema, de acordo com Usiskin (1995), o estudante trata as variáveis como sinal no papel, sem nenhuma referência numérica. Uma das oportunidades do estudante trabalhar com a dimensão Estrutural no Ensino Fundamental é por meio do estudo de Monômios e Polinômios.

Verifica-se que, muitos professores têm uma visão reducionista da Álgebra, trabalhando com os estudantes apenas a dimensão Equacional, fazendo com que as demais dimensões, no decorrer da Educação Básica, sejam uma barreira para o aprimoramento de determinados conceitos ao longo da trajetória escolar desses estudantes (BRASIL, 1998).

Acredita-se que além das dimensões da Álgebra é imprescindível, para o processo de ensino e aprendizagem, refletir sobre como o estudante aprende os conceitos matemáticos. Na perspectiva de Duval (2003) a abordagem cognitiva permite aos estudantes compreender as diversidades dos processos matemáticos. Este pesquisador desenvolveu a teoria denominada Registros de Representação Semiótica, a qual tem por objetivo estudar as várias representações dos objetos matemáticos e suas influências no processo de ensino e aprendizagem (Duval, 2003, 2011). Isto porque, segundo ele, os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de representações, o que diferencia a Matemática de outras ciências e disciplinas escolares.

Para Duval (2003, 2011) a aprendizagem Matemática requer transformações cognitivas, a saber: tratamento e conversão. O tratamento consiste de transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo, ao efetuar um cálculo preserva-se a mesma representação de escrita. A conversão refere-se à mudança de registro, ou seja, uma

mudança externa. Esta transformação é importante porque cada registro, que pertence a um sistema semiótico, revela um aspecto do conceito estudado. Além disso, cada registro apresenta suas particularidades. Assim, as representações são parciais em relação ao que ela representa. Um exemplo de conversão referente a produtos notáveis é em relação a um trinômio quadrado perfeito, ao qual justifica-se geometricamente a igualdade $(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$ a partir da decomposição de um quadrado, bem como elucida-se esta explicação com a propriedade distributiva da multiplicação (Duval, 2003, 2011).

Contudo, alguns professores privilegiam apenas um sentido de conversão matemática, sendo possível notar, nos diferentes níveis de ensino, as dificuldades e bloqueios dos estudantes quando se faz necessária à mudança de registros de representação ou é requerida a mobilização de dois registros simultaneamente.

Considerando as várias representações de um determinado conceito e as transformações cognitivas, destaca-se a relação entre Álgebra e Geometria para o entendimento dos conceitos algébricos. Isto porque podem substituir a prática "letrista" por atividades significativas.

A articulação entre a Álgebra e a Geometria pode ser potencializada com a utilização de materiais manipuláveis. Os materiais manipuláveis são importantes para o processo de ensino e aprendizagem, pois permitem estabelecer relações entre diferentes representações dos objetos e compreender intuitivamente os conceitos matemáticos envolvidos.

Nos PCN (BRASIL, 1998) destaca-se que a aprendizagem precisa estar centrada na construção de significados e, para que isso aconteça as atividades não devem apenas estar voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão, mas sim, devem fazer com que o estudante desenvolva processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução. Acredita-se que os materiais manipuláveis podem auxiliar no desenvolvimento desses raciocínios matemáticos.

No que se refere ao ensino e aprendizagem da Álgebra, pode-se fazer o uso do material manipulável Algeplan com o intuito de propiciar uma construção significativa da Álgebra, estabelecendo relação com a Geometria. Este material consiste em relacionar a Álgebra a diferentes formas geométricas (quadrados e retângulos), permitindo o trabalho com os registros geométrico e algébrico na realização de operações (soma, subtração, multiplicação e divisão) algébricas.

Pode-se verificar por meio de diversos trabalhos que relatam o uso do Algeplan (FANTI, 2006; PASQUETTI, 2008; BOLLAUF, 2012; SCHUCK, 2013) que este é um recurso bastante utilizado no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra em função das

suas potencialidades, principalmente, na possibilidade de representar geometricamente (figural) os objetos matemáticos.

Para a abordagem do Algeplan é necessário que os estudantes saibam o conceito de área e perímetro, pois para entender a área do polígono deverá saber, no caso do quadrado, que área é, lado ao quadrado e que o perímetro é a soma de todos os seus lados. Por mais que a Álgebra e a Geometria possuam representações distintas, com o material manipulável Algeplan, é possível relacionar campos da Geometria e da Álgebra, destacando um registro da dimensão estrutural pouco mobilizado, a saber: o registro figural.

Porém, para uso do Algeplan o professor deve estar ciente dos limites e potencialidades, pois ele, assim como a geometria e a álgebra, tem sua representação e estas são sempre parciais em relação ao objeto matemático. Sendo assim, é recomendado ao professor que proponha atividades que permitam aos estudantes transitar entre as diferentes representações.

3 Metodologia

Com base no objetivo delineou-se a metodologia que fundamentou este trabalho. Optou-se por uma pesquisa de cunho qualitativo, todavia, dados quantitativos foram produzidos com a intenção de elucidar as produções da pesquisa.

Realizou-se a análise de uma coleção de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2014 (BRASIL, 2013), no que tange a proposta didática[1] para o ensino do conceito de Álgebra em sua dimensão Estrutural. Foi escolhida a coleção "Vontade de Saber – Matemática" do Ensino Fundamental (livros do 6º ao 9º ano), a qual faz parte do PNLD/2014 de autoria de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, em função da escolha realizada pelos professores de Matemática da escola a qual realizam-se os trabalhos vinculados ao PIBID/Subprojeto Matemática e Grupo matE². Cabe destacar que a coleção analisada foi a do estudante e não a do professor, esta última não foi analisada por não se ter acesso.

Para a análise da coleção de livros didáticos organizou-se o quadro 2[2] para destacar as categorias de análise:

[1] Entende-se aqui por proposta didática as escolhas (teóricas e metodológicas) feitas pelo(s) autor(es) de livros didáticos na apresentação dos conceitos matemáticos.
[2] Lista de abreviações: Cap. = capítulo, pág. = página, ativ. =atividades, m/grau. = monômio e seu grau, P/grau. = polinômio e seu grau, op. = operação, prod.not. = produtos notáveis, repres. = representação, na qual separamos por representação figural, numérica, algébrica e geométrica e recursos utilizados.

Quadro 2: Organização das categorias de análise

Livro	Cap.	Pág.	Ativ.	M/grau	P/grau	Op.	Prod. Not.	Repres.	Recurso

Para compreender como a dimensão Estrutural da Álgebra é proposta na coleção de livros didáticos identificou-se os conteúdos Monômios e Polinômios. Esta identificação também destacou: grau do Monômio e do Polinômio, operações entre as estruturas Monômio e Polinômios, abordagem dos Produtos Notáveis, Registros de Representação Semiótica e as Transformações Cognitivas. Assim como os recursos que a coleção de livros didáticos faz uso ou entende que potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico, tais como recursos computacionais e materiais manipuláveis (por exemplo, o Algeplan).

Não foram categorizadas as atividades que exigiam determinar o valor numérico dos Monômios e Polinômios, por não ser foco da pesquisa, ou seja, levou-se em consideração apenas atividades em que a representação algébrica estava presente.

A coleção selecionada é composta por quatro livros didáticos (6º, 7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental), organizados em unidades e capítulos, tendo como modelo metodológico a explanação teórica dos conteúdos seguida de exercícios de aplicação. Cada volume está dividido em capítulos, iniciados com uma apresentação do tema a ser estudado, acompanhada da seção “Conversando sobre o assunto”. Em seguida, os conteúdos são organizados em itens, que contêm explanação e exemplos relativos aos tópicos do tema do capítulo. Cada item inclui, ainda, atividades propostas, algumas das quais são destacadas com ícones: “Desafio”, “Cálculo mental”, “Contexto”, “Tratamento da Informação e Calculadora” (BRASIL, 2014).

Ao final de cada capítulo há as seções “Refletindo sobre o capítulo”, “Revisão e Testes”, na conclusão de alguns capítulos, também, encontra-se as seções “Explorando o tema”, que trata da história da Matemática ou de outras áreas do conhecimento; “Acessando tecnologias”, que apresenta sites e outros recursos tecnológicos. Ao final de cada volume, tem-se as seções “Ampliando seus conhecimentos”, com sugestões de livros e de sites; “Respostas das atividades propostas”; e “Bibliografia”. A obra ainda conta com oito Objetos Educacionais Digitais (OED). No que tange a utilização de recursos tecnológicos, há, sempre no final do capítulo atividades referentes à utilização do *software Microsoft Mathematics* e também do *GeoGebra* (BRASIL, 2014).

Após a análise da coleção de livros didáticos optou-se por analisar as potencialidades e limites do Algeplan para posterior elaboração de sequências de ensino que relacionem as

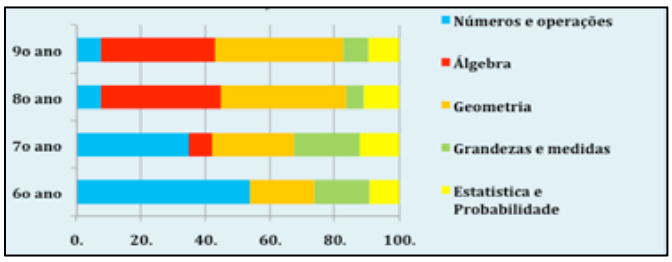
atividades da coleção e o uso desse material manipulativo. Cabe destacar que, o Algeplan é formado por 40 peças/figuras geométricas, quadrados e retângulos, com diferentes dimensões, 1, x e y. As peças com as mesmas medidas têm a mesma cor e representam valores positivos, já o verso das peças é preto ou cinza e representa valores negativos. Sendo constituído por quadrados de lado x, na cor amarela, área x^2 e perímetro $4x$, quadrados de lado y, na cor azul, área y^2 e perímetro $4y$, quadrados de lado 1, na cor vermelha, área 1 e perímetro 4, retângulos de lados x e y, na cor verde, área xy e perímetro $2(x+y)$, retângulos de lados x e 1, na cor laranja, área x e perímetro $2(x+1)$ e retângulos de lados y e 1, na cor roxa, área y e perímetro $2(y+1)$.

Selecionadas as atividades foram construídas as representações figurais com o auxílio do Algeplan.

4 Discussão dos resultados

Para realizar a análise da coleção de livros didáticos, primeiramente, optou-se por analisar as avaliações apresentadas no PNLD/2014 (BRASIL, 2013) acerca da coleção. Conforme o documento a coleção expõe os tópicos normalmente abordados no Ensino Fundamental, por exemplo, *Números e Operações*, *Álgebra*, *Geometria*, *Grandezas e Medidas* e *Estatística e Probabilidade*. A figura 1 apresenta a distribuição dos campos da matemática nos quatro volumes que compõem a coleção.

Figura 1: Distribuição dos campos da matemática na coleção de livros analisada.



Fonte: PNLD/2014 (BRASIL, 2013)

Com base na figura 1, constata-se que a distribuição do tópico Álgebra é desigual e concentra-se nos 8º e 9º anos, porém para esta pesquisa os resultados obtidos concentraram-se no 8º ano pois é nesta etapa da Educação Básica que está previsto, conforme os PCN, o ensino de monômios e polinômios. No 9º ano não foram encontrados resultados para o foco desta pesquisa porque neste ano está previsto o ensino, relacionado à Álgebra, de sistemas de equações lineares.

Os volumes, no geral, são divididos de 10 à 14 capítulos, o que resulta em aproximadamente 320 páginas. Após uma verificação geral dos livros, explorou-se mais atentamente o capítulo 5 do livro do 8º ano e os capítulos 1 e 2 do 9º ano, pois os livros do 6º e 7º ano não apresentam a dimensão da álgebra analisada nesta pesquisa.

Foram classificadas 130 atividades envolvendo Monômios, Polinômios (com graus que variavam de nulo até 40) e Produtos Notáveis, bem como as quatro operações básicas, sendo enfatizado o trabalho com a multiplicação e com representações algébrica, geométrica e figural, cujo detalhamento pode ser observado no quadro 3.

Quadro 3: Classificação dos dados[3]

Livro	Cap.	Nº de At. do Cap.	Nº de At. Cat.	Estrutura			Operações	Recurso	Representação Matemática				
				P.	M.	Prod. Not.			Num.	Al.	Gra.	Fig.	Geo.
8º ano	5	144	117	57	29	0	62	2	6	111	1	9	38
9º ano	1	74	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
9º ano	2	102	12	0	0	12	8	0	6	12	0	0	2

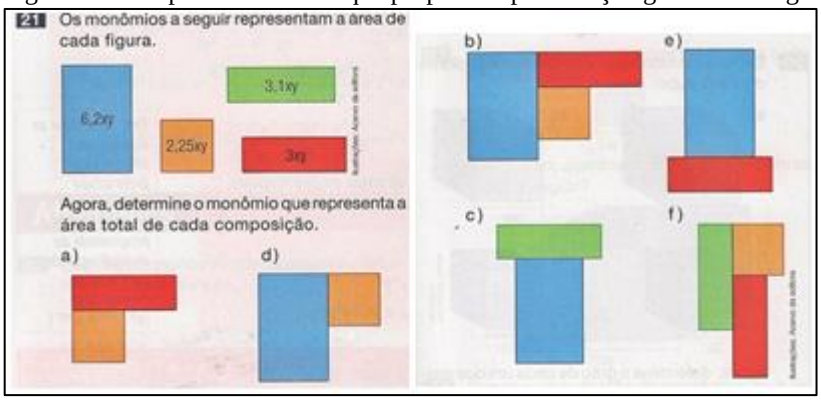
Verifica-se, no quadro 3, que nos livros didáticos do 6º e 7º anos não foram categorizadas atividades. Em relação aos monômios, foram categorizadas 29 atividades no livro didático do 8º ano e 57 atividades de polinômios, todas no capítulo 5 denominado "*Monômios, Polinômios, Produtos Notáveis e Fatoração".* Já referente ao livro didático do 9º ano, as atividades classificadas são relacionadas aos produtos notáveis, que estão propostas nos capítulos 1 (*Raízes*) e 2 (*Equações do 2º Grau*).

Em relação à abordagem realizada acerca de monômios, há no livro didático do 8º ano uma apresentação do conceito de Expressões Algébricas, fazendo uma rápida menção aos seus aspectos históricos, após são expostas atividades propostas. A seguir, é apresentado o conceito de monômios, definindo a relação de semelhança entre eles e grau. É importante destacar que, verificou-se uma menção a relação existente entre a área de um retângulo (lados y e $3x$) e monômios. Após a explicação, são propostas atividades que visam abordar aspectos e conceitos anteriormente expostos. Posteriormente, define-se adição e subtração com o auxílio de representação geométrica de paralelepípedos (prismas de base retangular), propondo o cálculo do volume destes sólidos. Para tanto, os autores desenvolvem operações

[3] Cap.=capítulo, At. = atividade, Cat.=categorizada, P.= polinômio, M. = monômio, Prod. Not. = produtos notáveis, Num. = numérica, Al. = algébrica, Gra.= gráfica, Fig.= figural, Geo.=geométrica.

que envolvem multiplicação entre variáveis ($v = ab \times h$) e, para adição, utilizam a ideia intuitiva de divisão por escalar e fatoração. A figura 2 apresenta um exemplo de atividade, proposta pelo livro, envolvendo adição e subtração de monômios.

Figura 2: Exemplo de atividade que propõe a representação geométrica/figural

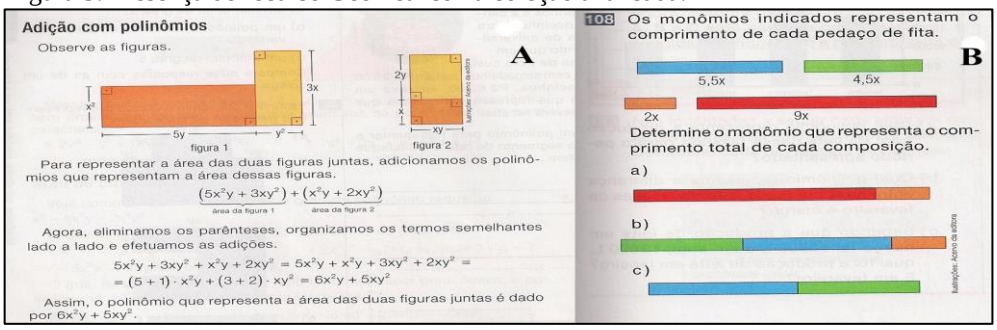


Fonte: Livro didático do 8º ano

A figura 2 foi categorizada como monômio de grau 2, envolvendo a operação de adição e com representação geométrica/figural[4] e não utiliza *software*. De uma forma geral, os autores trabalham conversão entre os registros figural e numérico e também conversão entre o registro figural e algébrico, como é possível visualizar na atividade. No decorrer do capítulo, aborda-se as operações multiplicação, divisão e potenciação entre monômios e sempre após a explanação teórica são propostas atividades.

Em relação a abordagem de polinômios, esta é realizada logo após a explanação sobre monômios. É notável a presença dos registros geométrico e figural na explicação teórica (definição de polinômio, simplificação e grau). A figura 3A refere-se à apresentação das operações adição e subtração de polinômios, com ênfase na representação geométrica/figural e a conversão desta para o registro algébrico. Após são apresentadas atividades sobre adição e subtração de polinômios, conforme exemplo exposto na figura 3B.

Figura 3: Presença de recurso Geométrico na coleção analisada.



Fonte: Livro Didático do 8º ano

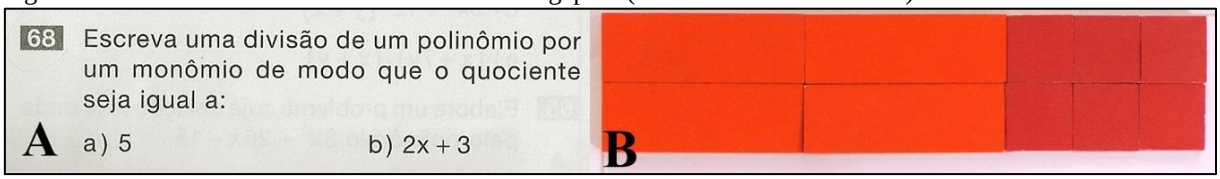
[4] Representação a qual usa-se figuras geométricas e relações entre a figura e conceitos da geometria plana.

No que tange ao ensino da operação de multiplicação de polinômios, é estabelecida uma relação com o cálculo da área de uma figura plana. Percebe-se a busca por utilizar as representações geométricas/figurais para o entendimento da operação de multiplicação, opção esta, semelhante as propostas fundamentadas na utilização do Algeplan. A divisão de polinômios por monômios é realizada de forma sucinta e, também, utiliza a representação geométrica/figural.

É perceptível a preocupação dos autores com a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica tanto nas explanações quanto nas atividades propostas. Entende-se que o uso do Algeplan pelo professor potencializaria a proposta apresentada, pois permitiria ao estudante uma "ponte" entre as abstrações da Álgebra e o material manipulável, possibilitando ao estudante atribuir significado ao uso das letras nas operações.

Há algumas atividades em que está explícito o uso da representação geométrica/figural, mas sem fazer menção ao uso do Algelan. Bem como, há atividades que não exploram a relação entre álgebra e geometria. Enfatiza-se a importância do uso do Algeplan para compreensão do estudante acerca dos conceitos envolvidos, conforme exemplifica-se na figura 4 (A e B).

Figura 4: Atividade construída com o auxílio do Algeplan (atividade 68 alternativa b)



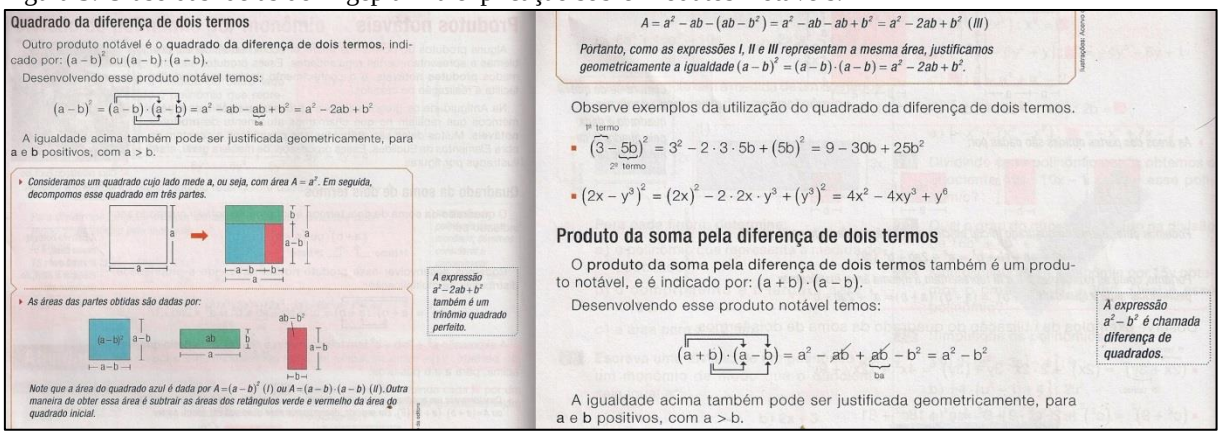
Fonte: Adaptado do livro didático do 8º ano

Para realizar esta divisão, com o auxílio do material manipulativo, foi necessário construir um retângulo com as peças que representam o dividendo, de modo que um dos lados equivalesse a 2, que é o divisor e outro lado que fosse equivalente a $(2x + 3)$, que é o quociente da divisão proposto pelo livro. Neste exemplo, escolheu-se como dividendo arbitrário o 2, porém, o estudante pode começar a conjecturar a partir de uma multiplicação para "encontrar" o divisor e a partir da área do retângulo formado com o Algeplan "encontrar" o dividendo, pois quando tem-se uma divisão exata, o produto do quociente pelo divisor será o próprio dividendo. Neste caso, então, utilizou-se as peças que equivalem ao dividendo para construir um retângulo em que um dos lados seja o divisor. O outro lado, consequentemente, será o quociente procurado (POLETO, 2010).

Em relação ao trabalho com produtos notáveis, o próprio livro didático começa com uma abordagem a partir da história da matemática e, em seguida, parte para o quadrado da

soma e da diferença de dois termos e o produto da soma e da diferença de dois termos, relacionando estas operações com o princípio do Algeplan[5], porém, sem mencioná-lo. Nas atividades propostas, é perceptível o entendimento dos autores quanto a importância do registro geométrico/figural no processo de ensino e aprendizagem, sendo proposto o método de completar quadrados. Ressalta-se, que não foi analisado o manual do professor, no qual pode constar a presença do Algeplan como recurso para determinadas atividades e explicações. Pode-se observar na figura 5, o uso dos princípios do Algeplan na explicação sobre Produtos Notáveis.

Figura 5: O uso das ideias do Algeplan na explicação sobre Produtos Notáveis.



Quadrado da diferença de dois termos

Outro produto notável é o **quadrado da diferença de dois termos**, indicado por: $(a-b)^2$ ou $(a-b)\cdot(a-b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - \underbrace{ab}_{ba} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

A igualdade acima também pode ser justificada geometricamente, para a e b positivos, com a > b.

- *Consideramos um quadrado cujo lado mede a, ou seja, com área $A = a^2$. Em seguida, decompomos esse quadrado em três partes.*

- *As áreas das partes obtidas são dadas por:*

Note que a área do quadrado azul é dada por $A = (a-b)^2$ (I) ou $A = (a-b)\cdot(a-b)$ (II). Outra maneira de obter essa área é subtrair as áreas dos retângulos verde e vermelho da área do quadrado inicial.

A expressão $a^2 - 2ab + b^2$ também é um trinômio quadrado perfeito.

$$A = a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (III)$$

Portanto, como as expressões I, II e III representam a mesma área, justificamos geometricamente a igualdade $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

Observe exemplos da utilização do quadrado da diferença de dois termos.

- $(\overbrace{3}^{1^{\text{o}}\text{ termo}} - \underbrace{5b}_{2^{\text{o}}\text{ termo}})^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 5b + (5b)^2 = 9 - 30b + 25b^2$
- $(2x - y^3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot y^3 + (y^3)^2 = 4x^2 - 4xy^3 + y^6$

Produto da soma pela diferença de dois termos

O **produto da soma pela diferença de dois termos** também é um produto notável, e é indicado por: $(a+b)\cdot(a-b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \underbrace{\cancel{ab}}_{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

A igualdade acima também pode ser justificada geometricamente, para a e b positivos, com a > b.

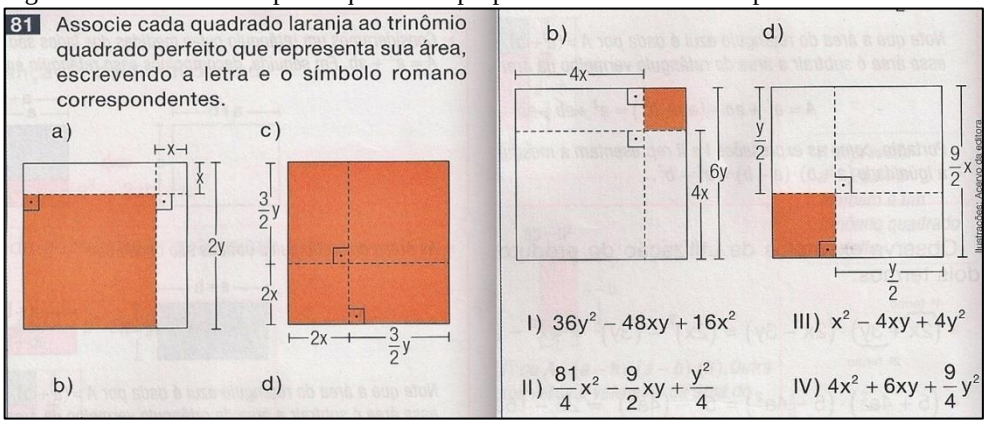
A expressão $a^2 - b^2$ é chamada diferença de quadrados.

Fonte: Livro Didático do 8ºano.

Neste caso, o uso das áreas das figuras geométricas (princípio do Algeplan), foi utilizado para a demonstração da igualdade entre as sentenças, a partir da decomposição de um quadrado inicial em dois retângulos e outro quadrado, ou seja, o método de completar quadrados. Ao propor a decomposição de polinômios, por exemplo, não se está generalizando modelos matemáticos, nem traduzindo situações-problema na tentativa de resolvê-los. Neste caso, a variável é um símbolo arbitrário sendo utilizadas as características próprias das operações algébricas para que se possa desenvolver o polinômio em sua forma expandida.

[5] Este material manipulativo tem por princípio, ou ideia principal, estudar as operações com polinômios utilizando as áreas de retângulos.

Figura 6: Método de completar quadrados proposto em uma atividade pelo livro didático.



Fonte: Livro Didático do 8º ano.

A figura 6 apresenta uma atividade que envolve o método de completar quadrados. Esta atividade encontra-se no livro didático do 8º ano, e foi categorizada como um polinômio de grau 2, um produto notável. Tem representação Algébrica/Geométrica e não foi classificada quanto a operação, pois não necessariamente esta é fundamental para a realização da atividade. O uso do método de completar quadrados, para o trabalho com trinômios quadrados perfeitos, evidencia a importância do trabalho com material manipulável (por exemplo, Algeplan) para o ensino desses conceitos.

5 Considerações Finais

Por meio da análise de dados pode-se afirmar que na coleção há equilíbrio quanto à exploração dos conteúdos monômios, polinômios e produtos notáveis. Em relação aos registros de representação semiótica categorizados, constata-se mais ênfase para a representação algébrica/geométrica em detrimento da numérica, decorrente talvez da dimensão cujos conteúdos analisados pertencem (dimensão estrutural).

Nas atividades observa-se que os autores priorizam o entendimento dos conceitos/conteúdos abordados e não a simples memorização das expressões algébricas. Quanto as explanações teóricas, verifica-se que a representação geométrica/figural é utilizada, para relacionar monômios e polinômios aos conceitos de área e volume, propondo vários exemplos e as atividades os quais conectam a Álgebra e a Geometria.

No que tange as contribuições do Algeplan, conclui-se que é abordado constantemente métodos e representações que correspondem ao princípio do Algeplan (não é utilizado explicitamente), como é exposto na Análise de Dados. Portanto, pode-se inferir que o estudo da dimensão estrutural apresentada nesta coleção é significativo, potencializando aspectos que contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3 Referências

BOLLAUF, M. F.; MUNHOZ, R. H. Ensino de Álgebra na Educação Básica: Uma proposta contextualizada. In: *III Escola de Inverno de Educação Matemática e 1º Encontro Nacional PIBID-Matemática*, 2012, Santa Maria/ RS.

BRANCO, N. C. O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Educação. Lisboa, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. Guia do livro didático 2014: Matemática – séries/anos finais do ensino fundamental. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2013.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. FRANCHI, Anna et al.; org. Silvia Dias Alcântara Machado – 3 ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010.

FANTI, E. L. C. et al. Ensinando fatoração e funções quadráticas com o apoio de material concreto e informática. In: *Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da Unesp (artigos 2006)*. 1ª ed. SP: Cultura Acadêmica, 2008, v. 1, p. 170-184.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas, SP, Papirus, 1997.

PASQUETTI, Camila. *Proposta de Aprendizagem de polinômios através de Materiais Concretos.* Erechim: URI, 2008. 48 f. Trabalho de conclusão Matemática, Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico*. MEC/Direção geral de inovação e desenvolvimento curricular. Portugal, set.2009.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis. IN: *As ideias da Álgebra.* Organizadores: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VALE, I. Materiais manipuláveis na sala de aula: Que se diz, o que se faz. In *Atas ProfMAt 99*. Lisboa: APM. 1999.

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SCHUCK, F. et al. O uso do Algeplan como ferramenta para a construção de conceitos referentes a produtos notáveis. In: *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2013, Curitiba/PR.