UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

GRAZIELA CARRAZZONI DOS SANTOS

UMA PROPOSTA PARA A COMPREENSÃO DO OBJETO FUNÇÃO A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Itaqui
2017

GRAZIELA CARRAZZONI DOS SANTOS

UMA PROPOSTA PARA A COMPREENSÃO DO OBJETO FUNÇÃO A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática

Orientadora: Profª. Ma. Patrícia Pujol Goulart Carpes

Itaqui
2017

GRAZIELA CARRAZZONI DOS SANTOS

UMA PROPOSTA PARA A COMPREENSÃO DO OBJETO FUNÇÃO A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 04/12/2017.

Banca examinadora:

____

Profª. Ma. Patrícia Pujol Goulart Carpes
Orientadora
UNIPAMPA

____

Prof. Me. Alex Sandro Gomes Leão
UNIPAMPA

____

Prof. Lic. Filipe Sarmento Barreto
UNIPAMPA

"Um monstro ou uma bela senhora, a forma como vemos a Matemática é produto dos nossos esforços."

Prof. Jerriomar Ferreira

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo compreender o objeto matemático funções empregando a Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval por meio de uma sequência de ensino. Para tanto, retomou-se os conhecimentos teóricos sobre funções, realizou-se um estudo bibliográfico e análise acerca da Teoria de Registros de Representação Semiótica e elaborando-se, por fim, uma sequência de ensino. Sendo assim, abordou-se o objeto funções, especificamente que proporcionasse a conversão de registros, a determinação e variação dos coeficientes da função real de uma variável real, a análise do comportamento da função no seu domínio e a exploração do *software* GeoGebra como uma potencialidade no ensino de funções. A opção metodológica baseia-se em uma pesquisa qualitativa por meio de uma revisão bibliográfica. A sequência de ensino alicerça-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas proposta por Onuchic e Allevato. Quando se faz uso desta metodologia, trabalha-se com atividade de investigação, quer seja pelo lado do professor ou dos estudantes, podendo ser até de ambos sobre o processo. Desta forma, organizou-se quatro planos de aulas, primeiramente abordou-se caso de função ou não através de situação-problema seguindo de outra situação explorando a variação das variáveis e sua dependência. No segundo, abordou-se a variação dos parâmetros e construção dos gráficos, utilizando o *software* GeoGebra. O terceiro está constituído pelas transformações (conversão e tratamento) entre registros e identificação de grandezas. E o último, por meio do uso de situações-problemas, buscou-se trabalhar os diferentes registros de representação semiótica. Considera-se assim, que a proposta de sequência de ensino baseada na teoria de Duval, utilizando das transformações de registros (tratamento e conversão) de maneira contextualizada pode potencializar a compreensão do objeto matemático funções, nesse caso, as funções afim e quadrática.

Palavras-Chave: Funções. Representações Semióticas. Sequência de ensino.

ABSTRACT

This research aims to understand the mathematical object Functions by employing Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations and using a teaching sequence for this. For that, the theoretical knowledge about Functions was taken up, a bibliographic and analytical study on the Theory of Registers of Semiotic Representations was carried out and a teaching sequence was finally elaborated. Therefore, we approached the object functions, specifically that would provide the conversion of records, the determination and variation of the coefficients of the real function of a real variable, the analysis of the behavior of the function in its domain and the exploitation of GeoGebra software as a potential in the teaching of functions. The methodology of this work is based on a qualitative research through a bibliographical review. The teaching sequence considers Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations and uses as teaching-learning-evaluation methodology the Problem Solving Methodology proposed by Onuchic and Allevato. When this methodology is used, occurs the investigation activity that can be done by the teacher or by the students or both. In this way, four lesson plans were organized, we first studied the case of existence or non existence of a Function considering a problem situation, and then another situation was proposed with the objective of exploring the behavior of the function variables. In the second lesson, we discussed the variation of the parameters and the construction of the graphs, using GeoGebra software. In the third lesson the transformations (conversion and treatment) between the registers of semiotic representation are discussed and the identification of quantities is explored. And in the last lesson, through the use of situations-problems, we tried to work the different registers of semiotic representation. It is thus considered that the proposed sequence of teaching based on the Duval’s theory, which uses the transformations of registers (treatment and conversion) in a contextualized way can enhance the understanding of the mathematical object Functions, in this case, the linear and quadratic functions were studied.
Keywords: Functions. Semiotic Representations. Sequence of teaching.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OCEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PCN+ - PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

TRRS - Teoria de Registros de Representação Semiótica

Unipampa - Universidade Federal do Pampa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho possui como base teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, a qual considera como pressuposto que o uso de registros de representações semióticas dos objetos matemáticos contribui para a aquisição e assimilação dos objetos matemáticos. Essa teoria enfatiza a importância em se transitar entre os diferentes registros na apropriação de objetos matemáticos.

O conceito de função geralmente é um dos conceitos mais importantes estudados, presente desde os anos finais do Ensino Fundamental, se aprofundando no Ensino Médio, busca-se assim integrar nesse estudo estes dois tópicos. As funções adquirem relevância principalmente por permitir ao aluno obter a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, fundamental para demonstrar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, estruturando modelos descritivos de fenômenos e concedendo várias ligações dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 1999).

Segundo Duval (2009) os objetos matemáticos são os números, as funções, as retas, etc. O objeto matemático, conforme Godino et. al (2006, p.5) apud Silva e Almeida (2009, p.1), é "qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática".

Nos últimos três séculos, o conceito de função evoluiu significativamente, passando assim por várias generalizações e ampliações. Leibniz, em 1694, parece ter sido o mentor do termo "função" o introduzindo em seus estudos. Ao passo que Newton, fazia uso da palavra "fluente" quando se referia a algo que varia à medida que o tempo passa. Bernoulli foi quem formulou um conceito de função centrado no ponto de vista de relação entre conjuntos de números, podendo ser formulado do seguinte modo "se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde, mediante a aplicação de uma lei ou regra, um valor de y, então se diz que y é uma função de x" (MARQUES, 2014).

Os PCN+ Ensino médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) tratam de três eixos estruturadores que devem ser desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio. O objeto matemático Função, faz parte do eixo estruturador 1

“Álgebra: números e funções”, que aponta que na vivência cotidiana, a álgebra se apresenta com significativa importância enquanto linguagem, também na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, bem como instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. Devendo este eixo no ensino médio, tratar de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos.

Os PCN+ salientam que a “ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções” (BRASIL, 2002). Neste contexto, na proposta que se apresentará buscou-se dar ênfase a esses estudos.

A seguir, a justificativa do trabalho é apresentada.

1.1 Justificativa

O conteúdo funções acompanha os estudantes em praticamente todas as etapas de sua escolaridade, constituindo-se em noções extensas e complexas, que vão desde noções de proporcionalidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental até o ensino superior, por exemplo, nos cálculos, e ao passar por cada uma dessas etapas seu aprofundamento vai aumentando.

A relevância dos conceitos e processos algébricos fica explícita quando se analisa os muitos fenômenos que podem ser modelados por tais (BRASIL, 1999). No ensino de Funções, é possível a construção de uma linguagem algébrica de caráter linguístico-científico. De outro modo, o estabelecimento de relações entre grandezas, otimizado pelo conceito de Função possibilita a elaboração de modelos matemáticos para a resolução de situações-problema reais.

Documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN (BRASIL, 1999) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006) têm evidenciado que os estudantes, de modo geral, concluem o Ensino Médio sem a apropriação devida do objeto matemático funções. Isto se torna preocupante uma vez que a compreensão desse conteúdo pode auxiliar a resolver problemas que aparecem em situações cotidianas e sua falta pode acarretar dificuldades em estudos posteriores. Lochhead e Mestre (1995) apud Bassoi (2006, p. 04-05) atestam que mesmo depois de cursar a disciplina de

Cálculo Integral e Diferencial, muitos discentes de engenharia “apresentaram dificuldades na construção de uma função, ou mesmo de seu reconhecimento, em uma de suas formas representacionais”, demonstrando assim que a aprendizagem de funções apresenta dificuldades que perduram nos diferentes graus de ensino.

Esta situação vem de encontro com as observações em atividades de prática de docência da autora, que como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) acompanha o contexto de uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, na qual os estudantes demonstram certas dificuldades no estudo de funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Salientando-se assim que este trabalho foi desenvolvido no âmbito do PIBID. Além do mais, a autora ao longo de sua trajetória acadêmica e especialmente ao cursar o componente curricular obrigatório do curso Matemática-Licenciatura, Teoria Elementar das Funções, da Universidade Federal do Pampa (Unipampa), notou que os discentes do ensino superior possuíam muitas dificuldades, e a maior parte delas advindas do estudo gráfico das funções e da conversão do registro gráfico para a escrita algébrica, bem como descrever algebricamente situações cotidianas.

De acordo com Lenartovicz (2013) no Ensino Médio os estudantes encontram os obstáculos em compreender este objeto matemático, principalmente a observação e análise dos diferentes tipos de funções e suas representações. A mesma autora coloca que pouca importância é dada à interpretação gráfica das funções pelos professores deste nível de ensino, ficando restritos ao traçado de gráficos a partir de uma tabela de valores (LENARTOVICZ, 2013).

Nessa perspectiva a Teoria de Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo psicólogo francês Raymond Duval, torna-se uma relevante base teórica que contribui no entendimento das particularidades da manipulação das representações semióticas e a diversidade de registros utilizados nesse campo do conhecimento. Em seus estudos o autor apresenta a importância dos registros semióticos quando argumenta que

> É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Ora, a importância das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais. Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo. [...] A seguir, há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos

> números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos (DUVAL, 2011, p. 13-14).

Duval (2011) destaca que compreender a matemática implica a capacidade de mudar de registros, pois não se deve confundir o objeto e sua representação semiótica. E, ainda, que o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente pelas representações semióticas.

A seguir é apresentada a questão problema que a pesquisa busca responder.

1.2 Definição do problema

Mediante este cenário, busca-se responder a seguinte questão: Como uma sequência de ensino baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode auxiliar os estudantes do ensino médio na compreensão dos objetos funções afim e quadrática? O foco do estudo desta pesquisa é o objeto matemático funções, com área de conhecimento o ensino de funções na educação básica.

A seguir os objetivos geral e específicos são apresentados.

1.3 Objetivo geral

Compreender o objeto matemático funções empregando a Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval através de uma sequência de ensino.

1.4 Objetivos específicos

- Retomar os conhecimentos teóricos sobre funções;
- Realizar um estudo bibliográfico e análise acerca da Teoria de Registros de Representação Semiótica;
- Elaborar uma sequência de ensino que envolva o objeto funções, especificamente que propiciem a conversão de registros, a determinação e variação dos coeficientes da função real de uma variável real;
- Analisar o comportamento da função no seu domínio e explorar o *software* GeoGebra como uma potencialidade no ensino de funções.

Esta pesquisa apresenta além desta introdução, quatro seções e considerações finais. Na seção 2, intitulada O estudo de funções reais de variável real, buscou-se retomar os conhecimentos teóricos sobre funções, trazendo elementos importantes para o conhecimento do conceito de função e como eles são abordados.

A seção 3, intitulada Teoria dos Registros de Representação Semiótica, explana a proposta de Raymond Duval, quais registros de representação semiótica ele considera, bem como os dois meios de transformação de um objeto matemático: o tratamento e a conversão.

A seção 4 intitulada Procedimentos Metodológicos, explicita a forma como a pesquisa foi conduzida, ou seja, os meios que delineiam este trabalho.

Por conseguinte, a seção 5, intitulada Sequência de Ensino, traz a proposta de sequência elaborada, com quatro planos de aula; a mesma é discutida conforme a teoria supracitada.

As considerações finais da pesquisa são apresentadas e discutidas, onde será feito uma retomada dos elementos da pesquisa, bem como constatações gerais do trabalho realizado. E por fim, as referências utilizadas para escrita deste trabalho e os apêndices com os planos de aula.

A seguir é apresentado o estudo de funções reais de variável real.

2 O ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Apresenta-se neste capítulo o conceito de função e seus elementos, especialmente, das funções polinomiais de 1º e 2º graus, além da construção e interpretação de seus gráficos, buscando, dessa forma, fazer um estudo do objeto funções em seus diferentes registros.

2.1 Definição de Função

Uma função pode ser definida da seguinte maneira:

Quadro 1 - Definição de Função.

> Sejam os conjuntos *A* e *B* não vazios, uma relação f de *A* em *B* é uma função quando associa a cada elemento x, pertencente ao conjunto *A*, um único elemento y, pertencente a *B*. Essa função pode ser indicada por:
>
> $$f : A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B.$$
> $$x \longrightarrow y = f(x)$$
>
> (SOUZA, 2013)

Fonte: SOUZA (2013).

Desta forma, da definição acima duas condições devem ser suficientes e necessárias que ocorram para satisfazer um caso de função:

a) Todo elemento de *A* deve estar associado a algum elemento de *B*.

b) Um dado elemento de *A* deve estar associado um único elemento de *B*.

É importante de acordo com Santana (2011) salientar que:

i. A notação $f : A \to B$ (lê-se "função f de A em B") indica que a função f leva *A* para *B*, ou que f é uma aplicação de *A* em *B*, ou ainda que f é uma transformação de *A* em *B*.

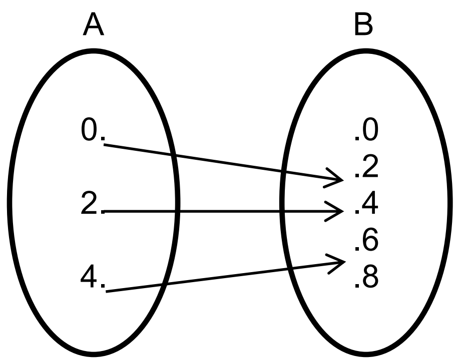
ii. Se y está definido em função de x, x é a variável independente e y é a variável dependente com os seus valores fixos ou determinados por uma regra dependendo dos valores atribuídos à variável x. Lejeune Dirichlet, segundo Marques (2014), definia variável como um símbolo que representa um elemento qualquer de um determinado conjunto de números.

iii. Para indicar o valor que a função f assume para x, escreve-se $f(x)$, lê-se "f de x", ou simplesmente y.

Caraça (1984) aponta que a essência do conceito de função está na correspondência unívoca entre as variáveis envolvidas na relação, estas permitem traduzir a interdependência e a fluência presentes na realidade. Para ele, o conceito de função nasceu do conceito de leis naturais. De acordo com Caraça (1984), ficam caracterizados como fundamentos essenciais da função, como associações internas desse conceito: a relação de dependência (interdependência) e a variação (fluência) dos elementos envolvidos. Assim sendo, os conceitos de variáveis, domínio, contradomínio, imagem e relação algébrica (lei de formação) são nexos conceituais desse conceito.

Apresenta-se a seguir exemplos[1] de relações e determinam-se quais representam funções:

1º) Dados os conjuntos A = {0, 2, 4} e B = {0,1,2,3,4,5} e a relação f de A em B expressa pela fórmula $f(x) = x + 2$, com $x \in$ A e $f(x) \in$ B.

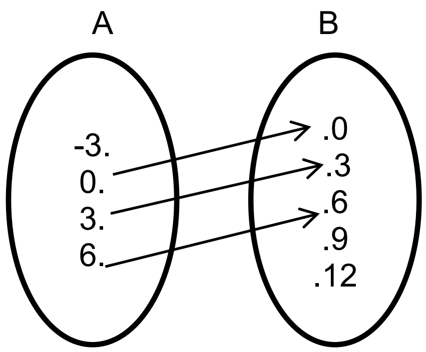


Fazendo uso da lei de formação da relação:

f (0) = 0 + 2 = 2
f (2) = 2 + 2 = 4
f (4) = 4 + 2 = 6

Nota-se que cada elemento x pertencente a *A* está associado a um único elemento y de *B*. Assim sendo, a relação f é uma função de *A* em *B*.

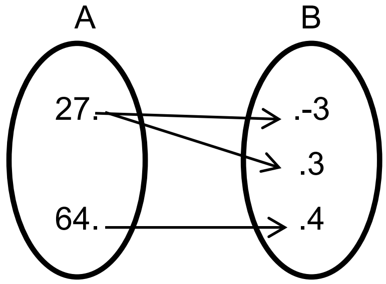
2º) Dados os conjuntos A = {-3, 0, 3, 6} e B = {0,3,6,9,12} e a relação f de A em B expressa pela fórmula $f(x) = x$, com $x \in$ A e $f(x) \in$ B.



Nota-se que o elemento -3 pertencente a *A* não está associado a um elemento em *B*. Assim sendo, este exemplo não expressa uma função de *A* em *B*.

[1] Retirados e adaptados de Giovanni e Bonjorno (2000).

3º) Dados os conjuntos A = {27,64} e B = {-3,3,4 } e a relação f de A em B expressa pela fórmula $f(x)^3 = x$, com $x \in$ A e $f(x) \in$ B.



Nota-se que o elemento 27 pertencente a *A* está associado a dois elementos (-3 e 3) do conjunto *B*. Assim sendo, este exemplo não expressa uma função de *A* em *B*.

2.2 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Seja f uma função de *A* em *B*, chama-se domínio de f (D(f)) o conjunto de partida, isto é, todo o conjunto *A*. Os elementos do conjunto *B* que estão associados a algum elemento de *A*, chama-se imagem da função f (Im(f)). Todo o conjunto B é chamado de contradomínio de f (CD(f)).

Ao se trabalhar com funções é primordial saber onde estas estão definidas, quer dizer, conhecer qual é o seu maior domínio, ou melhor, quais valores que x pode assumir.

Em muitas situações, o domínio da função já vem explicitado, como na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x^2 - 1$, que possui como domínio o conjuntos dos reais, D(f)= $\mathbb{R}$, ou ainda em $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x - 10$, tem-se como domínio o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e como contradomínio, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Porém em outras, o domínio e o contradomínio não estão explícitos, sendo apresentada apenas a lei de formação, nestes casos, devemos tomar como domínio o maior subconjunto possível dos números reais (D(f) $\subset \mathbb{R}$), para o qual a lei de formação faça sentido, e como contradomínio, o próprio conjunto dos números reais (CD(f) = $\mathbb{R}$).

2.3 Gráfico de uma função

Seja uma função f : A$\to$ B. O conjunto $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$. Denomina-se gráfico de f; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenadores (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensando como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f (GUIDORIZZI, 1987).

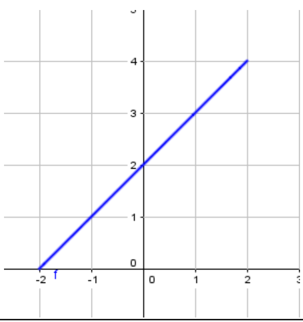
Para saber se um gráfico representa uma função de x em y, deve-se analisar se para cada x pertencente ao domínio da função, a reta vertical que passa por x corta o gráfico num único ponto.

Para determinar o domínio e a imagem de uma função através da análise de seu gráfico deve-se levar em consideração que o domínio é obtido pela projeção do gráfico sobre o eixo das abscissas (eixo dos x) e a imagem é obtida pela projeção do gráfico sobre o eixo das ordenadas (eixo dos y).

Toma-se como exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = x + 2$, no intervalo de -2 a 2:

Quadro 2 - Exemplo de função definida em dado intervalo.

x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



Fonte: da pesquisa (2017).

2.4 Função crescente, decrescente e constante sobre um intervalo

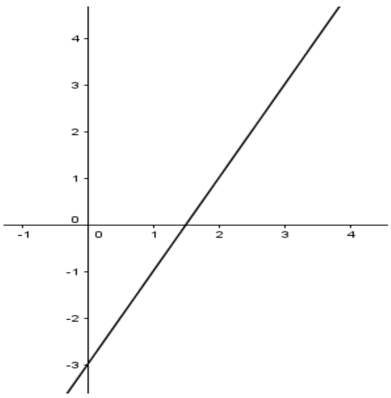
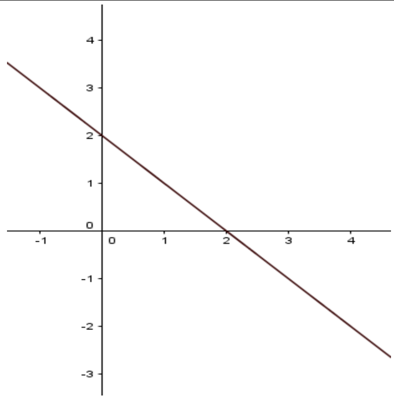
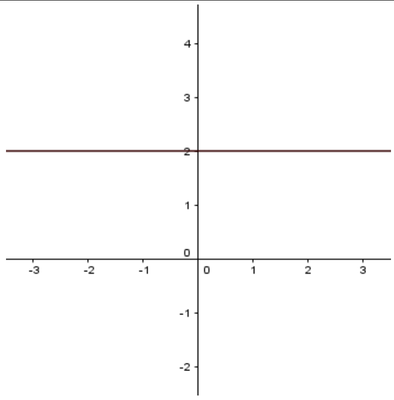
Uma função f pode ser definida como crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo, conforme Demana et al. (2009):

- é crescente se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, isto é, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$. Isto ocorrendo para todos os valores de x do domínio, tem-se uma função estritamente crescente.
- é decrescente se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, isto é, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$. Isto ocorrendo

para todos os valores de x do domínio, tem-se uma função estritamente decrescente.

- é constante se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em $f(x)$. Ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, isto é, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$.

Quadro 3 - Função crescente, decrescente e constante.

Função crescente	**Função decrescente**	**Função constante**
		
$f(x) = 2x - 3$	$g(x) = -x + 2$	$h(x) = 2$

Fonte: Da pesquisa (2017).

2.5 Pontos de Máximo e de Mínimo

Dada f uma função definida num domínio D(f), se diz que x_0 é um ponto de máximo relativo (ponto de máximo) se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0 tal que: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall$ $x \in A \cap$ D(f), isto é, x_0 é um ponto máximo se as imagens de todos os valores de x pertencentes ao domínio, situados num intervalo centrado em x_0, forem menores ou iguais à imagem de x_0. A imagem de $f(x_0)$ é denominada de valor máximo de f (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

Analogamente, se tem que x_0 é um ponto de mínimo relativo (ou ponto de mínimo) se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0, tal que: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall$ $x \in A \cap$ D(f), ou seja, x_0 é um ponto de mínimo se as imagens de todos os valores de x pertencentes ao domínio situados num intervalo centrado em x_0 forem maiores ou iguais à imagem de x_0. A imagem de $f(x_0)$ é denominada de valor mínimo de f (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

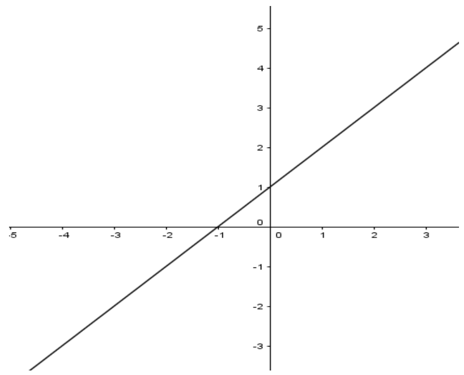
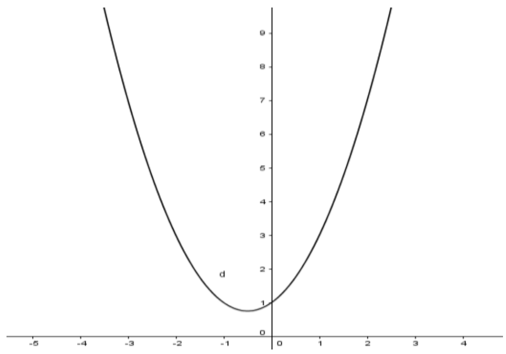
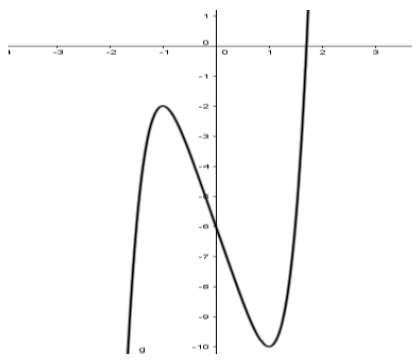
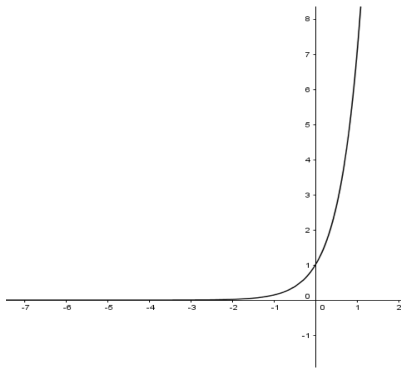
Ainda, segundo os mesmos autores, também se diz que x_0 é um ponto de máximo absoluto se $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in \mathrm{D}(f)$, e x_0 é um ponto de mínimo absoluto se $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\ x \in \mathrm{D}(f)$.

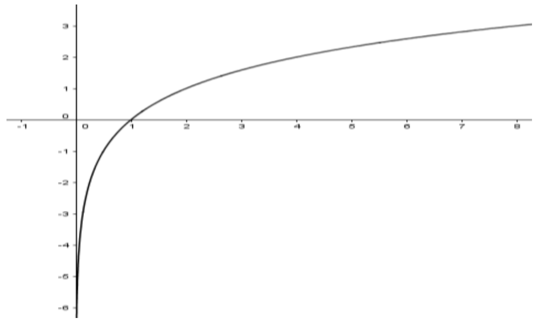
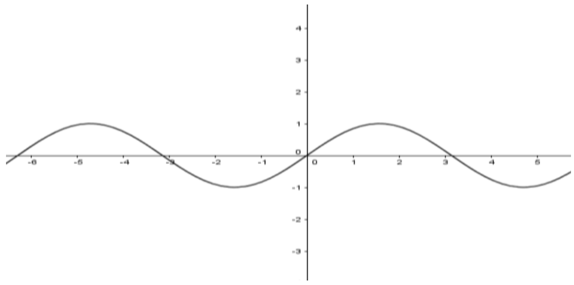
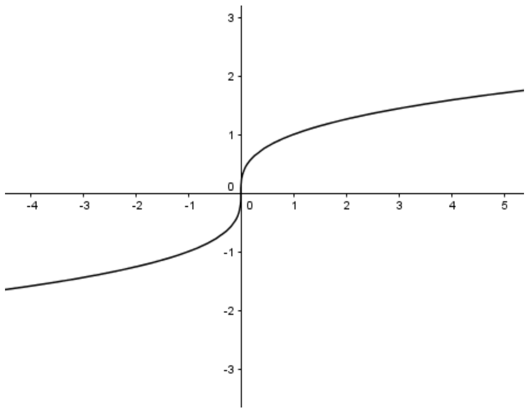
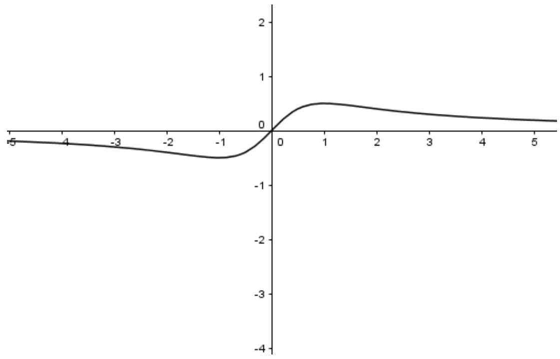
Assim sendo, existe uma diferença entre um ponto de máximo relativo e um ponto de máximo absoluto, onde o primeiro é um conceito vinculado às vizinhanças do ponto considerado, e o segundo é ligado a todo o domínio da função. O mesmo ocorre entre o ponto de mínimo relativo e o mínimo absoluto.

2.6 Classificação das Funções

As funções elementares são classificadas como: funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções trigonométricas, funções potência, funções racional.

Quadro 4 - Representações gráfica e algébrica das diferentes funções.

Função Afim ($f(x) = ax + b$, $a \neq 0$)  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Função Quadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$)  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Função Polinomial ($f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$) 	Função Exponencial ($f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$)  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
Função Logarítmica ($f(x) = \log_a x$), $a > 0$ e $a \neq 1$)	Função Trigonométrica (Função Seno = $f(x) = \operatorname{sen} x$)

 $f:\mathbb{R}_+^{*} \to \mathbb{R}$	
Função Potência ($f(x) = kx^a$, $k \neq 0$ e $a \neq 0$) 	Função Racional ($f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, $n(x)$ e $n(x)$ são polinômios e $d(x) \neq 0$) 

Fonte: Da pesquisa (2017).

Estas são alguns tipos de funções. A seguir serão abordadas as funções afim e quadrática com mais aprofundamento, dadas suas importâncias para este estudo. Desta forma, a partir de agora focamos nas funções polinomiais que são funções contínuas em toda a parte, haja visto que $f(a) = lim\, f(x)$ quando x tende a a e que possuem sucessivas derivadas ($f', f'', f''', \ldots$)[2] (ANTON, 2000).

2.7 Função polinomial do primeiro grau ou função afim

A função polinomial do primeiro grau, também chamada de função afim é uma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais e $a \neq 0$. É

[2] A derivada f' de uma função pode ser interpretada ou como uma função cujo valor em x é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em x, ou, alternativamente, como uma função cujo valor em x é a taxa instantânea de variação de y em relação a x no ponto x.

uma função contínua para todo valor de x. Seu gráfico é uma reta, podendo assim ser obtido por meio de dois pontos distintos, conforme o axioma de Euclides[3].

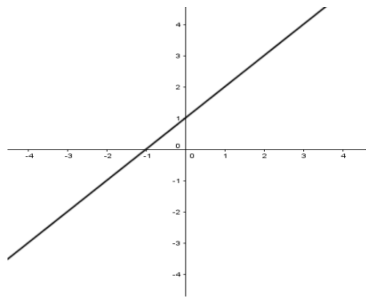
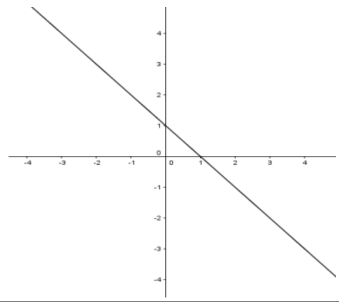
Pode-se construir o gráfico de uma função afim, atribuindo valores à variável independente, obtendo pares ordenados e representando-os em um plano cartesiano. Determina-se a quantidade de pares ordenados que satisfaçam a função dada, todavia, como D(f) = ℝ, consegue-se atribuir valores infinitos para x, como consequência, obtêm-se infinitos pares ordenados (SOUZA, 2013).

O parâmetro a chama-se coeficiente angular, inclinação, declive ou declividade, sendo a tangente trigonométrica do ângulo α que o gráfico da função faz com o eixo Ox e também é a taxa de variação da função do primeiro grau. Quanto maior o valor absoluto de a tanto mais inclinado será o gráfico da $f(x)$ em relação ao eixo Ox.

Sendo o a positivo indica que o seu ângulo de inclinação é do 1º quadrante, e seu gráfico será situado neste e no 3º quadrante. Sendo o a negativo significa que o seu ângulo de inclinação é do 2º quadrante, e seu gráfico será situado neste e no 4º quadrante (ÁVILA e ARAÚJO, 2012).

Por representar a variação de y correspondente a um aumento do valor x igual a 1, esse aumento é considerado a partir de qualquer ponto da reta; quando a > 0, o gráfico corresponde a uma função crescente, e, quando a < 0, o gráfico corresponde a uma função decrescente (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

Quadro 5 - Representação gráfica da função afim, coeficiente angular positivo e negativo.

a > 0 Função crescente Ângulo de inclinação no 1º quadrante	a < 0 Função decrescente Ângulo de inclinação no 2º quadrante
	

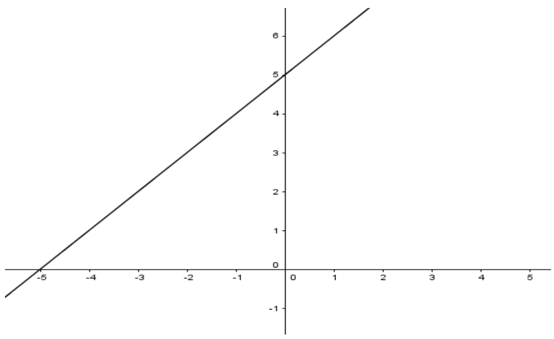
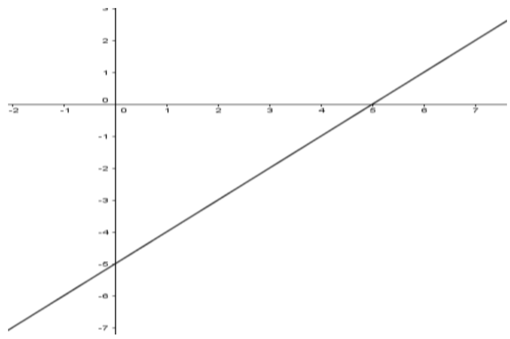
Fonte: Da pesquisa (2017).

[3] O primeiro axioma de Euclides diz que: “Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos distintos” (Santos, 2014).

Conhecendo-se dois pontos de uma reta *A* (x_1, y_1) e *B* (x_2, y_2), o coeficiente angular a é dado por $a = \frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Conhecendo-se um ponto *P* (x_0, y_0) de uma reta e seu coeficiente angular a, a função correspondente é dada por $y - y_0 = a\ (x - x_0)$ (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

O parâmetro b chama-se coeficiente linear da reta, representa, no gráfico, a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo dos y, assim sendo, o ponto de intersecção (0, b) (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010). Também representa em quantas b unidades o gráfico da função $f(x) = ax + b$ será transladado em relação a função do tipo $f(x) = ax$, quer dizer, que se $b > 0$, o gráfico será transladado para cima no eixo dos y (em b unidades) e se $b < 0$, o gráfico será transladado para baixo no eixo dos y (em b unidades) (SOUZA, 2013).

Quadro 6 - Representação gráfica da função afim, coeficiente linear positivo e negativo.

$b > 0$	$b < 0$
	

Fonte: Da pesquisa (2017).

É importante salientar que a função muda de comportamento exatamente no ponto (x,0), ou seja, na sua raiz. Deste modo, a função deixa de ser crescente para ser decrescente ou vice-versa.

Para saber para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$, é necessário estudar o sinal da função. Especificamente, quando se trata da função afim, tem-se que zero ou raiz da função do primeiro grau é o valor de x para o qual $f(x) = y = 0$. Isto é, $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, ou seja, o ponto $(-\frac{b}{a}; 0)$. Graficamente, é o ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas

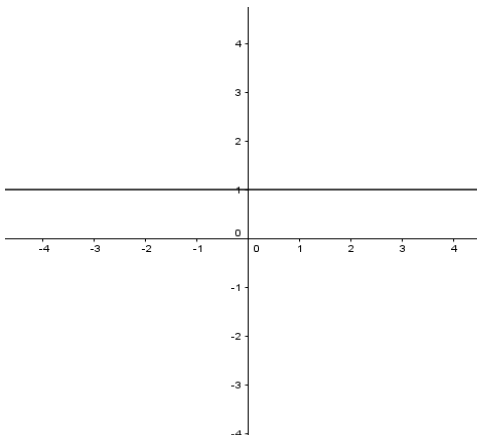
(CALDEIRA, SILVA, *et al.*, 2011)., conforme pode ser visto no quadro acima, no primeiro gráfico a raiz é igual a -5 e no segundo igual a 5.

Torna-se relevante lembrar que a função afim não possui ponto máximo ou mínimo, pois têm-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Todavia possui máximo e mínimo absoluto num intervalo fechado, por exemplo $[a, b]$, no qual b é o ponto máximo absoluto (Teorema do Valor Extremo[4]).

Alguns casos especiais da função afim:

a. Função constante: é do tipo $f(x) = b$ e associa a qualquer número real x um mesmo número real b. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo Ox, passando por $y = b$. Seu domínio é o conjunto dos números reais (D(f) = $\mathbb{R}$) e sua imagem é o conjunto unitário Im(f) = $\{b\}$.

Quadro 7 - Representação gráfica da função constante.

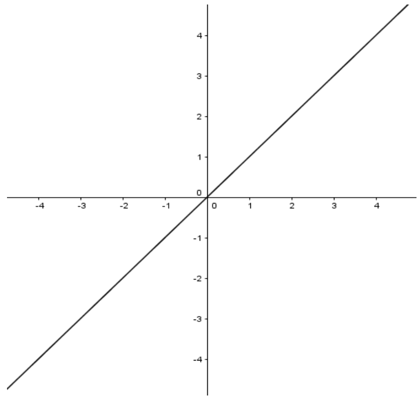


Fonte: da pesquisa (2017).

b. Função linear: é do tipo $f(x) = ax$ e associa a qualquer número real x o número real ax. Seu gráfico é uma reta não paralela aos eixos coordenados e sempre passando na origem. Seu domínio é o conjunto dos números reais (D(f) = $\mathbb{R}$) e sua imagem é o conjunto dos reais (Im(f) = $\mathbb{R}$), tendo suas grandezas (x e y) diretamente proporcionais.

[4] Teorema de Weierstrass ou Teorema do Valor Extremo: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então Im(f) é limitada e existem $y, z \in [a, b]$ tais que $f(z) \leq f(x) \leq f(y)$, para todo $x \in [a, b]$ (MATOS, 2008).

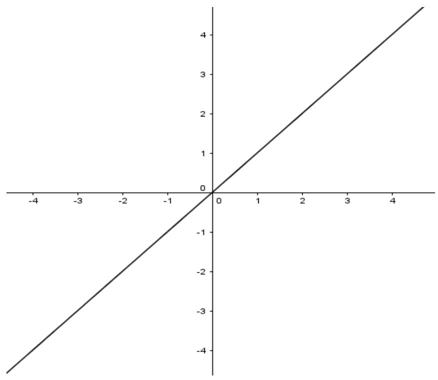
Quadro 8 - Representação gráfica da função linear.



Fonte: da pesquisa (2017).

c. Função identidade: $f(x) = x$ e associa a qualquer número real x um mesmo número real x. Seu gráfico é uma reta que contém as bissetrizes[5] do primeiro e terceiro quadrantes. Seu domínio é o conjunto dos números reais ($D(f) = \mathbb{R}$) e sua imagem é o conjunto dos reais ($Im(f) = \mathbb{R}$).

Quadro 9 - Representação gráfica da função identidade.



Fonte: da pesquisa (2017).

2.8 Função polinomial do segundo grau ou função quadrática

A função polinomial do segundo grau, também chamada de função quadrática é uma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c

[5] Bissetriz é a reta que divide os quadrantes considerados exatamente ao meio, portanto, todos os valores do eixo Ox serão iguais aos do eixo Oy.

constantes reais e $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola[6] com a concavidade voltada para cima ou voltada para baixo. Sendo b e c constantes, e variando a, sendo $a > 1$ a curva é mais fechada e quando $0 < a < 1$ a curva é mais aberta em relação a do gráfico de $f(x) = ax^2$.

Para Iezzi, Murakami e Machado (2005) uma função f derivável até segunda ordem em um intervalo I, se $x_0 \in I$ tal que $f''(x_0) \neq 0$, sendo que:

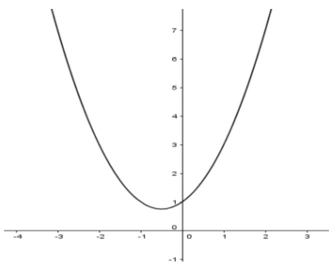
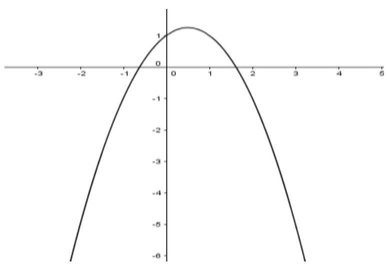
a. quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico da função possui concavidade voltada para cima em x_0;
b. quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico da função possui concavidade voltada para baixo em x_0.

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é derivável até segunda ordem em todo seu domínio, porque $f''(x) = 2a$. Observa-se assim que para qualquer $x_0. \in \mathbb{R}$ tem-se $f''(x_0) = 2a \neq 0$. Se $a \neq 0$, apresenta-se as seguintes situações:

• $a > 0$ então $f''(x_0) = 2a > 0$, quer dizer, o gráfico possui concavidade voltada para cima;

• $a < 0$ então $f''(x_0) = 2a < 0$, quer dizer, o gráfico possui concavidade voltada para baixo.

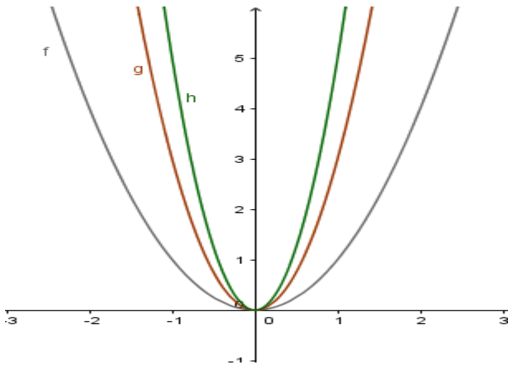
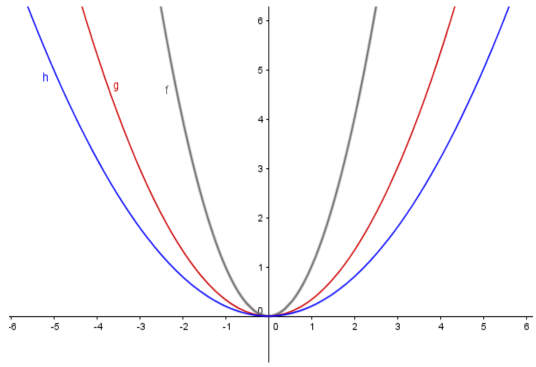
Quadro 10 - Representação gráfica da função quadrática com coeficiente angular positivo e negativo.

a > 0	a < 0
	

Fonte: da pesquisa (2017).

[6] Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano, com $F \notin d$, seja $2p$ a distância entre F e d. Parabóla é o conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de F e de d (CALDEIRA, SILVA, *et al.*, 2011)

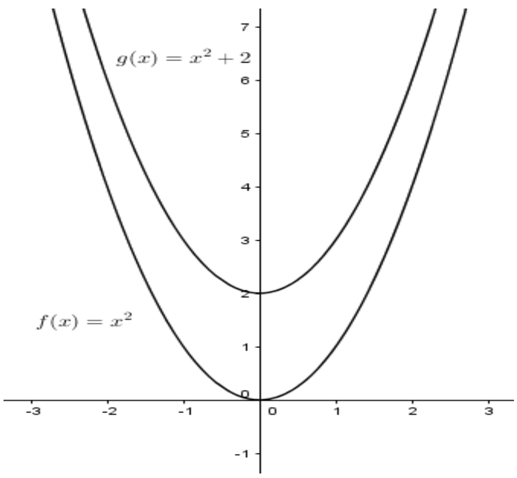
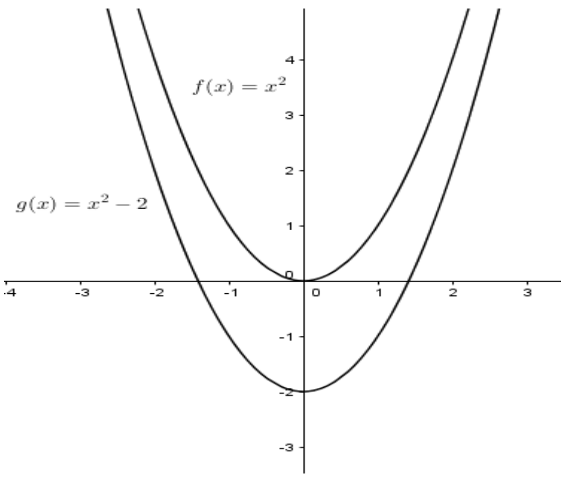
Quadro 11 - Representação gráfica da função quadrática quanto a variação do coeficiente angular, quando se tem os parâmetros b e c nulos.

$a > 1$	$0 < a < 1$
 $f(x) = x^2$ $g(x) = 3x^2$ $h(x) = 5x^2$	 $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ $h(x) = \frac{1}{5}x^2$

Fonte: da pesquisa (2017).

Quando se tem $f(x) = ax^2 + c$, considerando a função completa ou não completa, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto de coordenadas (0, c), isto significa que quando $x = 0$ obtém-se $y = c$, caracterizando também em quantas c unidades o gráfico irá transladar para cima ou para baixo do eixo das ordenadas quando comparada a da função $f(x) = ax^2$.

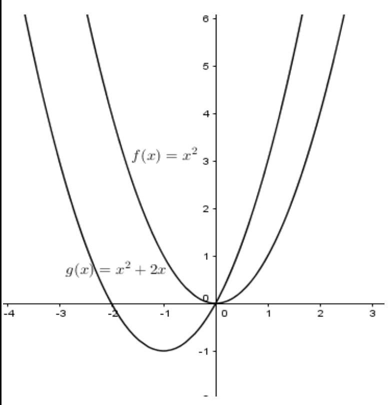
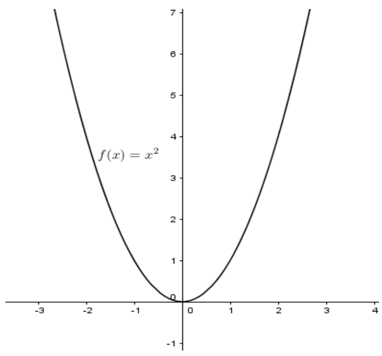
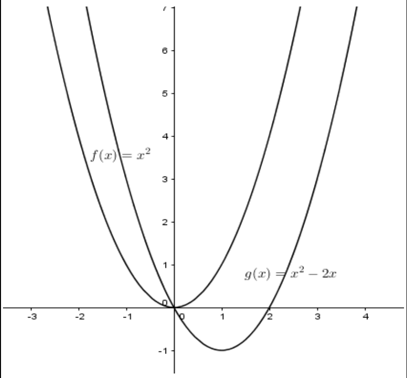
Quadro 12 - Variação do parâmetro c.

$c > 0$	$c < 0$
	

Fonte: da pesquisa (2017).

Quanto ao parâmetro b este indica se a parábola intercepta o eixo dos y, no seu ramo crescente (b > 0), decrescente (b < 0) ou no vértice (b = 0),

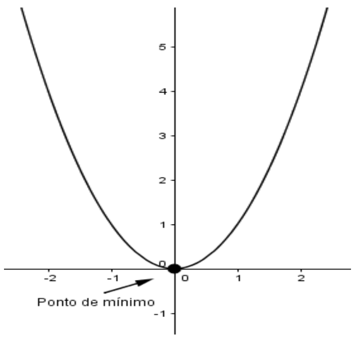
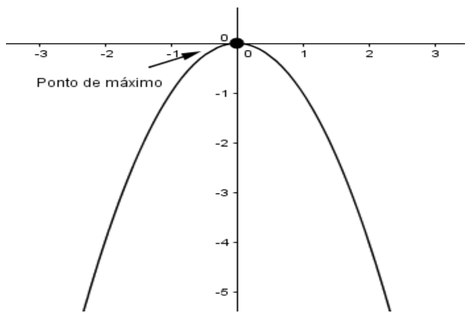
Quadro 13 - Variação do parâmetro b.

$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
		

Fonte: da pesquisa (2017).

O eixo vertical y é a reta de simetria para o gráfico $f(x)$ = ax^2, independentemente do sinal de a. Esta reta é conhecida por eixo de simetria da parábola. O ponto sobre a parábola que cruza seu eixo de simetria é denominado vértice da parábola (DEMANA, WAITS, *et al.*, 2009), assim sendo, quando a > 0, a abscissa do vértice é um ponto de mínimo e quando a < 0, a abscissa do vértice é um ponto de máximo (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

Quadro 14 - Ponto de mínimo e de máximo.

Ponto de mínimo (a > 0)	Ponto de máximo (a < 0)
	

Fonte: da pesquisa (2017).

Diferente da função do 1º grau, a função do 2º grau possui um extremo absoluto que pode ser um máximo ou mínimo absoluto. Fazendo o estudo do comportamento da função através dos seus limites tanto x tendendo para mais infinito ou menos infinito, temos que:

- Seja $f(x) + ax^2 + bx + c$

  Se $\lim_{x \to -\infty} ax^2 + bx + c = \lim_{x \to -\infty} ax^2 = \infty^*$

  * depende se vai para o $+\infty$ ou $-\infty$ conforme o sinal de a. Idem para $\lim_{x \to +\infty} ax^2 = \infty^*$.

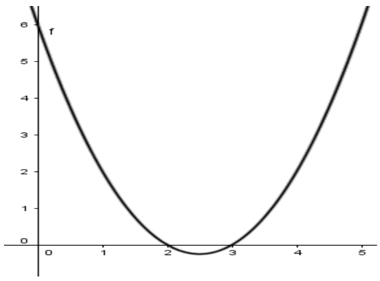
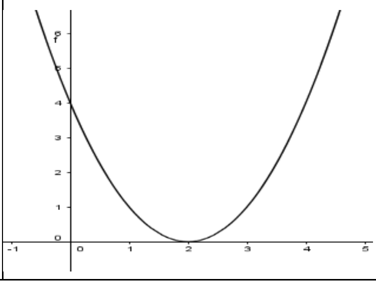
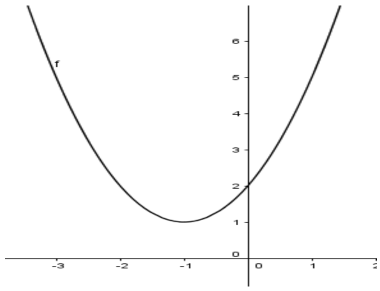
  Se $a \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to -\infty} ax^2 = \lim_{x \to +\infty} ax^2 = +\infty$, logo a função tem que possuir um mínimo.

  Se $a \in \mathbb{R}^-$, $\lim_{x \to -\infty} ax^2 = \lim_{x \to +\infty} ax^2 = -\infty$, logo a função tem que possuir um máximo.

Ainda com relação ao vértice da parábola, a abscissa e a ordenada do vértice são indicadas, respectivamente por, x_v e y_v sendo que $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = f(x_v) = \frac{-\Delta}{4a}$. Isto decorre da forma canônica da função quadrática, ou seja, considera-se o trinômio $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, coloca-se o a em evidência e completando quadrados, obtém-se: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$. Podendo assim, a lei de formação da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ser reescrita na forma: $f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$. Que é equivalente a: $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ (onde $x_0 = \frac{b}{2a}$ e $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$).

Fazendo-se $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$ obtém-se os eventuais pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox. Caso a equação tiver duas raízes reais distintas ($\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta > 0$), a parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos. Caso a equação tiver uma única raiz real ($\Delta = 0$), tangencia o eixo Ox em um único ponto e se não tiver raízes reais, ou seja, as raízes forem complexas conjugadas ($\Delta < 0$) a parábola não intercepta o eixo das abscissas (MORETTIN, HAZZAN e BUSSAB, 2010).

Quadro 15 - Interpretação geométrica do resultado do valor do delta.

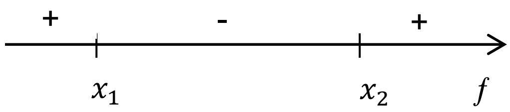
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

Fonte: da pesquisa (2017).

Sabendo-se o valor do discriminante e do parâmetro a, podem-se ter algumas conclusões de acordo com Caldeira et al. (2011):

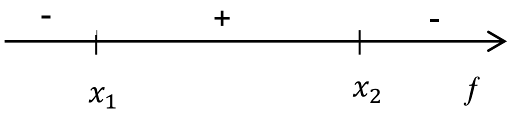
1. $\Delta > 0$ (discriminante positivo)

▪ $a > 0$



f é positiva em $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ e f é negativa $(x_1; x_2)$.

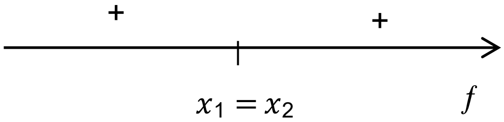
▪ $a < 0$



f é negativa em $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ e f é positiva $(x_1; x_2)$.

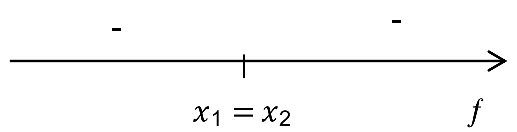
2. $\Delta = 0$ (discriminante nulo)

▪ $a > 0$



f é positiva em $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty) = \mathbb{R} - \{x_1\}$.

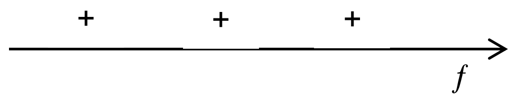
- $a < 0$



f é negativa em $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty) = \mathbb{R} - \{x_1\}$.

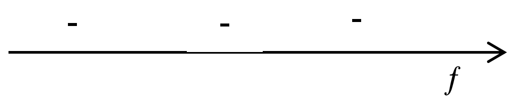
3. $\Delta < 0$ (discriminante negativo)

- $a > 0$



f é sempre positiva.

- $a < 0$



f é sempre negativa.

A seguir, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymon Duval é apresentada.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

De acordo com Santaella (2004) foi Charles Sanders Peirce (1839-1914), filósofo e lógico-matemático norte-americano, que instituiu a semiótica como um estudo da linguagem enquanto lógica e a partir daí, a semiótica emergiu como ciência.

Peirce (1965) apud Almeida (2013) argumenta que a semiose é um processo contínuo, que retrocede infinitamente até o objeto dinâmico. Ao passo que Miskulin, Martins e Mantoan (1996) colocam que uma abordagem semiótica nas sequências de ensino e de aprendizagem da matemática concede ao estudante se adequar aos saberes com significação própria, e apoiar-se nas linguagens e ambientes mais propícios para representarem as suas elaborações conceituais.

Entendendo que semiótica é a ciência que estuda os signos, mais especificamente os signos de linguagem e, que possui um campo amplo de investigação, torna-se relevante explorar que um signo ou *representamen* é aquilo que de alguma forma representa alguma coisa para alguém. Isto é, o signo simboliza alguma coisa, o seu objeto (PEIRCE, 1965 apud ALMEIDA, 2013).

Neste contexto, um signo não é um objeto, apenas faz referência a este objeto, representando-o de certo modo e com certa capacidade suas propriedades, tais como a representação algébrica e a gráfica de uma função que são todos signos do objeto matemático função.

O termo registro de representação semiótica é utilizado por Raymond Duval (2003) para referenciar a semiótica conhecida como ciência de todas as linguagens, sendo estas verbais ou não. Assim os enunciados de uma atividade, bem como sua resolução, podem envolver uma gama de registros, em linguagem verbal ou não verbal.

Esta concepção de registro torna-se visível em análises de tarefas que os educandos precisam encarar, emergindo de uma perspectiva semiótica: um registro é estruturado por signos e esses signos se associam de modo interno e externo.

A TRRS vem sendo desenvolvida pelo psicólogo e filósofo francês, pesquisador em Didática da Matemática, Raymond Duval desde o século XX, com o seu início em meados dos anos 80. Nesta teoria, Duval dedica-se ao estudo dos registros de representação que são utilizados nos procedimentos matemáticos, por exemplo, as escritas numéricas, algébricas, as figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas, a língua natural, etc. Registros estes que comumente são usados no estudo do objeto matemático funções.

Em relação a objeto, Duval (2013) declara que as comunicações dentro da matemática se estabelecem utilizando como base as representações, também considera que o discente recorre a uma representação para reconhecer um objeto matemático, analisando as diferentes representações de um único objeto.

Para Peirce (1965) apud Almeida (2013) o objeto pode ser algo concreto do qual se possa ter um perceptível conhecimento ou algo puramente mental ou imaginário (abstrato). Já Damm (1999) afirma que os objetos matemáticos necessitam do uso de uma representação para serem apreendidos, pois não são acessíveis e percebidos diretamente.

Segundo Duval (2003) o que diferente a matemática de outras áreas do conhecimento é sua abstração desencadeada por processos de generalização. Por causa da necessidade das representações semióticas, alguns conceitos e conteúdos não podem ser observados por meio de objetos concretos. No caso de uma função, ela pode ser representada por diferentes maneiras não palpáveis, como uma expressão algébrica, uma tabela ou um gráfico.

Para Duval (2012), é impossível desassociar do pensamento cognitivo humano os registros de representação semiótica diferentes. Para ele, só há *noésis* (compreensão conceitual de um objeto) se houver *sémiosis* (percepção ou formação de uma representação semiótica).

O conceito do objeto matemático “função”, conforme defende Duval (2003) decorre da realização de conversões entre registros, entendendo que registros diferentes, tais como gráficos e tabelas, fazem referência ao mesmo objeto matemático (função) e assim se complementam, visto que um registro pode expressar propriedades deste objeto não tão claras em outro registro.

Ainda como salienta Duval (2003) a compreensão no âmbito da matemática implica na manipulação de variados registros e na coordenação de no mínimo dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático.

Consoante a este fato Mariani (2006) enfatiza que um estudante conseguir resolver uma atividade que envolva um objeto matemático em uma representação, como por exemplo, a representação gráfica, não é garantido que ele saiba o conceito desse objeto.

Para elucidar esta ideia, Né (2013) coloca a seguinte situação:

> Neste momento, vamos nos concentrar no objeto matemático 'função quadrática'. Trago como exemplo particular a representação algébrica *f* (*x*) = $x^2 - 4x + 3$, que quando estudada no ensino médio, por exemplo, pode ser escrita na forma $y + 1 = (x - 2)^2$. Por mais que estas duas formas representem o mesmo objeto (função quadrática) e por ser possível, em ambas, se identificar se um ponto pertence ou não a função, se este ponto é coordenada de alguma das raízes, entre outras coisas, particularmente a segunda maneira de representar a função, definida por $y + 1 = (x - 2)^2$, traz de forma explicita as coordenadas de seus vértices2, que, neste caso, é o ponto (2,-1) ; informação que o primeiro registro não fornece.
> Ainda analisando a mesma função, se pensarmos em outro sistema semiótico de representação, como o seu registro gráfico, podemos identificar como a curva (função) se comporta, os intervalos de crescimento e decrescimento de seus valores, a quantidade de raízes que a função possui, a altura em que a curva intercepta o eixo das ordenadas, etc. Informações que os dois primeiros registro nem sempre possibilitam (NÉ, 2013, p. 30).

Assim, o professor deve manter-se atento para que os seus discentes não cometam o equívoco de confundir o objeto matemático com sua representação, já que apenas uma representação não possui informações suficientes sobre um objeto matemático, podendo gerar compreensão matemática limitada ao contexto de um único registro, não favorecendo as transferências e aprendizagens subsequentes.

Duval (2011) expõe a existência de quatro tipos diferentes de registros de representação semiótica mobilizáveis na prática matemática, classificando-os da seguinte maneira, conforme mostra o Quadro 16.

Quadro 16 - Classificação dos diferentes registros utilizados na atividade matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO - DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: gumentação a partir de observações, de crenças…; edução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). ·Apreensão operatória e não somente perceptiva; · Construção com instrumentos.

REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: ·Numéricas (binária, decimal, fracionária…); ·Algébricas; ·Simbólicas (línguas formais). Cálculos.	Gráficos cartesianos: ·Mudanças de sistemas de coordenadas; ·Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2011, p. 14)

Na perspectiva de Lenartovicz (2013) é exatamente a articulação existente entre esses diferentes registros que faz com que a aprendizagem em matemática tenha consistência e seja capaz de mobilizar a estrutura cognitiva de uma pessoa.

Os registros multifuncionais mostram-se presentes em todos os campos do conhecimento, podendo ser aprendidos fora da sala de aula, aprendizado que precede a matemática ensinada na escola. À medida que os monofuncionais são aprendidos em matemática, dentro da sala de aula, por serem mais formais e especializados. Nota-se que o ensino da matemática enaltece o registro monofuncional, por exemplo, cálculos e gráficos.

O registro de representação da linguagem natural utiliza a maneira natural dos homens se comunicarem. Como por exemplo, pode aparecer no enunciado de uma questão, onde o estudante precisa ler e interpretar o texto. A seguir, apresenta-se uma situação problema que se comporta como uma função, na forma de linguagem natural escrita: “Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada que fica a 15km de distância. O valor cobrado engloba o preço de parcelas fixas (bandeira) de R$ 4,00 mais R$ 1,60 por quilômetro rodado. Encontrar a fórmula que expressa $p(x)$ em função de x” (IEZZI, 2010, p. 71).

O registro algébrico é o modo que se escreve a lei de formação que relaciona as variáveis, fazendo uso de um conjunto de operações entre parâmetros numéricos e variáveis. No exemplo acima, percebe-se que há uma relação entre a distância percorrida pelo táxi (variável independente) e o preço para a corrida (variável dependente). Seu registro algébrico é a expressão $p(x) = 1{,}6x + 4$.

O registro tabular é representado por uma tabela, como exemplo no Quadro 17, onde é possível designar um valor para a variável x e assim determinar o valor da outra variável $p(x)$. Ressaltando que a função não está no esboço da tabela, todavia na associação estabelecida entre as variáveis x e $p(x)$.

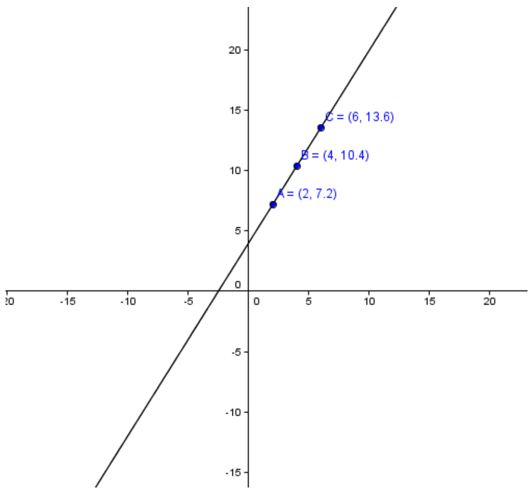
Quadro 17 - Registro tabular: preço x distância.

x	$p(x) = 1{,}6x + 4$	$p(x)$
2		R$ 7.2
4		R$ 10.4
6		R$ 13.6

Fonte: adaptado de Iezzi (2010)

O registro gráfico abrange o plano cartesiano, disposto pelos eixos ortogonais Ox e Oy, com a origem em (0,0). Este plano é utilizado para construir as formas que representam uma função, como pontos, linhas, curvas.

Quadro 18 - Registro gráfico: preço x distância.



Fonte: adaptado de Iezzi (2010).

Enxergando o objeto matemático que está sendo tratado, é plausível identificar sua representação, através de um registro de representação. Segundo Duval (2011) existem dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento, que decorre do trabalho dentro de um mesmo registro, cita-se como exemplo, a resolução de uma equação fazendo uso exclusivo do transformismo algébrico; e a conversão, que envolve mudanças de conjuntos de registros, como acontece quando se resolve uma equação algébrica por meio de sua representação geométrica.

A seguir apresenta-se o Quadro 19, elaborado por Duval (2011), com o propósito de elucidar as principais diferenças existentes entre estes dois tipos de transformações:

Quadro 19 - Tipos de transformação de representações semióticas.

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: Tratamento	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: Conversão
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ela corresponde a procedimentos de justificação.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.
De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se, algumas vezes, procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: Duval (2011, p.15)

Duval (2009) argumenta que ademais da conversão de um registro de representação para outro, a conceitualização do objeto matemático em análise sucede quando se compreende que há distintos registros para um mesmo objeto e, que estes podem se totalizar, expressando características ou propriedades em um registro, que não estavam tão claras no outro. Ou seja, utilizam-se vários registros de representação para um mesmo objeto e, conforme a teoria de Duval, a construção do conhecimento acontece quando se faz a conversão dessas representações (língua natural, gráfica, algébrica e numérica).

Duval (2011, p. 19) argumenta que se ao realizar a análise de uma atividade de conversão, é suficiente fazer a comparação da representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Assim, duas condições podem acontecer, a de congruência quando “a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação”, ou a de não congruência, “ela não transparece absolutamente”. Um exemplo de congruência e não congruência tem-se em

Lenartovicz (2013, p. 24-25), ao realizar a conversão da língua natural para a escrita algébrica os casos: 1) Conjuntos de pontos com abscissa maior que a ordenada: $x > y$ e 2) Conjunto de pontos cuja ordenada tem sinal diferente da abscissa: $x \times y < 0$. No primeiro caso há uma condição de congruência, onde ocorreu uma situação simples de codificação, ou seja, a língua natural apresentou todos os elementos que surgem na escrita algébrica e na mesma ordem. Já no segundo caso, temos uma situação de não congruência, dado que as simbologias expostas na expressão algébrica não estão visíveis na língua natural, tendo como consequência uma maior dificuldade de codificação para o estudante.

A seguir são apresentados os procedimentos metodológicos que delineiam esta pesquisa.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica e foram consultadas várias literaturas relativas aos temas em questão, como Duval (2003, 2011, 2012), Lenartovicz (2013), Mariani (2006), Morettin, Hazzan e Bussab (2010), Iezzi, Murakami e Machado (2005), Souza (2013), entre outros, que contribuíram para que este trabalho fosse fundamentado e elaborado. Assim, conforme Gil (2010), a pesquisa bibliográfica é realizada tendo como suporte materiais já publicados e possui como propósito analisar diferentes posições sobre um determinando assunto. Ou seja, proporciona ao pesquisador que este entre em contato com o material existente sobre este assunto, auxiliando-o na análise de sua pesquisa ou na manipulação de informações. Neste contexto, buscou-se na literatura materiais relacionados a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Duval e, a funções, especialmente a afim e a quadrática, que contribuíssem para o estudo.

Quanto à abordagem se fez uso da pesquisa qualitativa, pois neste caso, não se preocupa em representar numericamente os fatos, e sim, exprimir de que maneira pode ser abordado o objeto estudado, com ênfase nos processos e nos significados. Conforme Borba (2004) a pesquisa qualitativa vêm se destacando em pesquisas de educação matemática e seu significado está em constante movimento, visto que “prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida” (BORBA, 2004, p.2). Neste sentido, esta pesquisa enquanto qualitativa busca analisar as características do trabalho, dando enfoque à compreensão e discussão acerca dos dados obtidos.

Ao final, elaborou-se uma sequência de ensino baseada na TRRS para o ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, que apesar de não aplicada está direcionada a estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, que já possuam o conhecimento prévio do conteúdo (par ordenado, classificação) de funções.

Para tanto, buscou-se atividades contextualizadas, que pudessem ser resolvidas utilizando-se a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2008), bem como recurso didático, um *software* de geometria dinâmica[7].

Por recurso didático, entende-se “todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos” (SOUZA, 2007, p. 111). Utiliza-se o *software* GeoGebra como um instrumento para desenvolver um plano de aula de maneira mais dinâmica e proveitosa, esperando-se que aprendizagem dos educandos torne-se significativa e acessível. Salientando que “a utilização de recursos didáticos pedagógicos diferentes dos utilizados pela maioria dos professores (quadro e giz), deixam os educandos mais interessados em aprender” (TRIVELATO E OLIVEIRA, 2006, p.2).

A seguir, a proposta de sequência de ensino é apresentada.

[7] Faz-se uso do software GeoGebra como um recurso para o ensino de funções, e não como metodologia de ensino (Utilização de Tecnologia de Informação e Comunicação).

5 SEQUÊNCIA DE ENSINO

Apresenta-se neste capítulo a sequência de ensino para funções afim e quadrática, elaborada com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e na Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2008) que segundo as autoras, quando se faz uso desta metodologia, trabalha-se com atividade de investigação, quer seja pelo lado do professor ou dos estudantes, podendo ser até de ambos sobre o processo.

Segundo Onuchic e Allevato (2008) o docente pesquisa ao escolher ou criar problemas que se adequem à construção de um conhecimento novo sobre a temática que está ensinando; quando dentre muitas estratégias seleciona a que mais de adequa à resolução daquele problema; ao planejar as questões que conduzirão seus estudantes, numa reunião plenária com toda a classe, na análise dos resultados obtidos e apresentados e quando chega ao consenso sobre estes; e ao preparar a melhor formalização desses novos conceitos/conteúdos construídos a partir do problema dado.

Conforme as mesmas autoras, os estudantes quando buscam descobrir caminhos, com base nos seus conhecimentos prévios e/ou já construídos, e quando decidem quais destes caminhos devem percorrer para resolver o problema, estão investigando e trabalhando colaborativamente, visto que acabam relacionando ideias e debatendo sobre o que deve ser feito para chegar à solução.

Ademais, Onuchic e Allevato (2008) destacam que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é integrante de uma mais atual concepção acerca de avaliação, constituindo-a numa oportunidade de aprender. Assim, a avaliação será construída durante a resolução do problema, resultando em uma integração ao ensino e num aumento da aprendizagem.

Não há maneiras rígidas de fazer uma programação e colocar em prática esta metodologia, todavia existe um roteiro de atividades que servem como referência ou orientação para se trabalhar com ela. No Quadro 20 apresenta-se as seguintes etapas que podem ser consideradas:

Quadro 20 - Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Formar grupos e entregar uma atividade.	Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado. Progredir em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo colaborativo e deve-se dar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Assim, devem-se organizar os alunos em pequenos grupos, permitindo que sua aprendizagem, em sala de aula, se realize, também, no contexto desses grupos.
O papel do professor	O papel do professor, nesta etapa do trabalho, muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem. O professor deve lançar questões desafiadoras e ajudar os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para superar as dificuldades. O professor, ao fazer a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. As resoluções realizadas nos grupos devem ser apresentadas, por escrito, ao professor.
Resultados na lousa	Com o trabalho dos alunos terminado, o professor, na lousa, anota os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados, feitos por diferentes caminhos, etc.
Plenária	O professor chama todos os alunos para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, têm condições de participar, juntamente com o professor, na exploração e discussão dos resultados.
Análise dos resultados	Nesta fase os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são trabalhados. Outra vez surgem problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o “levar o trabalho à frente”. O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.
Consenso	A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.
Formalização	A partir do consenso, num trabalho conjunto, professor e alunos, com o professor na lousa, fazem uma síntese daquilo que se objetivava aprender a partir do problema ou da situação-problema e, formalmente, o professor coloca as definições, identifica as propriedades, faz as demonstrações, etc. (ALLEVATO, 2006; ONUCHIC, 2004).

Fonte: Onuchic e Allevato (2008)

A seguir apresenta-se a Sequência de Ensino, contendo quatro planos de aulas, ao fim de cada plano, há uma discussão sobre os mesmos.

PLANO DE AULA I
Carga horária: 02 horas/aula
Tema
Noção de função, variáveis, domínio e imagem.
Objetivo(s)
➢ Reconhecer uma função em sua representação tabular; ➢ Compreender e identificar a variável dependente e a independente; ➢ Descrever a lei de formação de uma função através de enunciado apresentado, ou seja, realizar uma conversão entre dois registros de representações semióticas (a língua natural e a forma algébrica); ➢ Resolver a igualdade de duas equações de 1º grau, realizando assim o tratamento de um registro de representação semiótica; ➢ Realizar uma conversão entre os registros de representação semiótica: tabular e algébrico; algébrico e gráfico; ➢ Identificar as grandezas envolvidas.
Recursos Metodológicos
Caderno, lápis, caneta, lousa, marcador para quadro branco, folhas de registro impressas.
Metodologia
Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Desenvolvimento
▪ **Atividade 01** 1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto. 2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios. **Título:** A venda de calças de uma loja **Objetivo:** Reconhecer uma função em sua representação tabular.

Fonte da questão: Brainly (2017)

Questão proposta: O quadro abaixo representa a quantidade de calças vendidas de acordo com seu tamanho em uma determinada loja. Observe o quadro e responda:

Quadro 21 - Número de calcas x Tamanho.

A	Número de calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

Fonte: Braylin (2017)

a) A correspondência representa uma Função de *A* em *B*? Por quê?

b) A correspondência de *B* em *A* seria uma função? Por quê?

Solução esperada: Uma relação f de *A* em *B* necessita satisfazer dois requisitos:

1) Todo elemento de *A* deve estar associado a algum elemento de *B*.

2) A um dado elemento de *A* deve estar associado um único elemento de *B*.

Assim sendo, as respostas devem ser próximas ao apresentado a seguir:

a) Não, pois o elemento 170 de *A* corresponde a dois elementos de *B*, 42 e 48.

b) Sim, pois atende às condições 1) e 2).

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: professor formaliza a relação como função ou não (definição).

- **Atividade 02**

1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.

2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: Os planos de saúde

Objetivo: Compreender e identificar a variável dependente e a independente; Descrever a lei de formação de uma função através de enunciado apresentado, ou seja, realizar uma conversão entre dois registros de representações semióticas (a língua natural e a forma algébrica); Resolver a igualdade de duas equações de 1º grau, realizando assim o tratamento de um registro de representação semiótica.

Fonte da questão: Lenartovicz (2013).

Questão proposta: Uma pessoa vai escolher entre dois planos de saúde, A e B. As condições de cada plano são:

Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 180,00 e R$ 40,00 por consulta.

Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 120, 00 e R$ 50,00 por consulta.

a) Sabendo das informações apresentadas, preencha a tabela a seguir.

Plano A

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal					

Plano B

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal					

b) Para um cliente que utilize 4 consultas mensais, em média, qual seria o plano mais vantajoso financeiramente? Explique como você encontrou esta resposta.

c) Supondo agora que o número de consultas fosse alterado para 8 consultas mensais, o plano mais vantajoso continuaria sendo o mesmo? Justifique sua resposta.

d) Agora se não temos um número fixo de consultas no mês, determine uma expressão algébrica que poderia ser usada para calcular o valor do plano A e do plano B.

e) Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções referentes aos planos de saúde A e B.

f) Analisando o gráfico, responda. Em qual situação o plano A é mais econômico? Em qual situação o plano B é mais econômico? E quando os dois se equivalem?

g) Sabendo das funções que determinam o custo de cada um dos planos, como poderíamos determinar algebricamente o ponto de equilíbrio entre eles, ou seja, quando o custo é igual para ambos?

h) Sabendo a função que representa a situação, determinar qual seria o número de consultas feitas por um cliente se ele pagou pelo plano A R$ 540,00 em um determinado mês? E se pagou pelo plano B R$570,00? Apresente os cálculos/justificativas que você realizou para chegar a estas conclusões.

Solução Esperada:

a) Plano A

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal	220	260	300	380	580

Plano B

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal	170	220	270	370	620

b) Plano B.

Plano A

f(4) = 180 + 40 * 4

f(4) = 180 + 160

f(4) = 340

Plano B

f(4) = 120 + 50 * 4

f(4) = 120 + 200

f(4) = 320

c) Plano A.

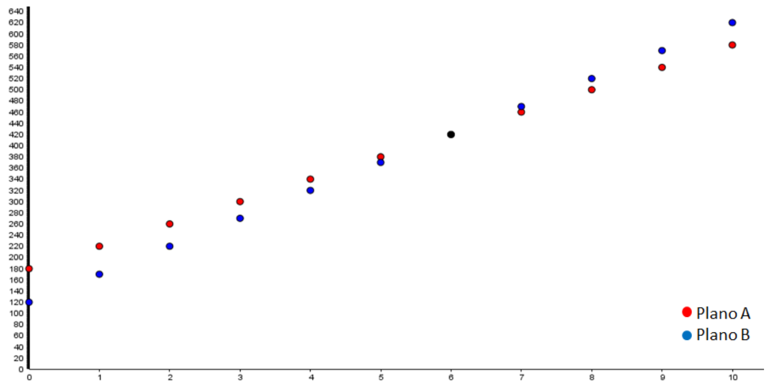
Plano A	Plano B
f(8) = 180 + 40 * 8	f(8) = 120 + 50 * 8
f(8) = 180 + 320	f(8) = 120 + 400
f(8) = 500	f(8) = 520

d) A: f(x) = 180 + 40 * x

B: f(x) = 120 + 50 * x

e)

Quadro 22 – Gráfico comparação dos planos.



Fonte: da pesquisa (2017).

f) Plano B é mais econômico até 5 consultas. O plano B é mais econômico a partir de 7 consultas. E os dois se equivalem quando é 6 consultas.

g) A = B

180 + 40x = 120 + 50x

120 + 50x = 180 + 40x

50x – 40x = 180 – 120

10x = 60

x = 6

h)

f(A) = 180 + 40x	f(B) = 120 + 50x
540 = 180 + 40x	570 = 120 + 50x
540 – 180 = 40x	570 – 120 = 50x
40x = 360	50x = 450
x = 9	x = 9

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: professor formaliza variável, (in)dependência, identifica o registro tanto na forma algébrica, tabular, gráfica e língua natural.

Avaliação

A avaliação será feita em consonância com a compreensão dos estudantes e as estratégias utilizadas pelos mesmos, assim serão observados quais conceitos os estudantes mobilizam para a resolução das atividades propostas. Também serão observados o interesse e participação na aula.

Referências

BRAINLY. Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/1111289>. Acesso em: 10 out. 2017.

LENARTOVICZ, I. G. **Aplicação da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de Administração.** 2013. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2013.

A atividade 01 que busca reconhecer o que é uma função e que pode ser expressa como uma função polinomial do 1º grau, onde no seu enunciado traz a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva, bem como faz uso da tabela - Registro Multifuncional de representação não discursiva, para criar uma correspondência entre o número de calças vendidas e seus tamanhos. Os itens a) e b) exploram a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva, tanto em seus enunciados quanto em suas soluções, bem como a língua formal – Registro Monofuncional de representação discursiva

A atividade 02, faz o estudo de funções polinomiais do 1º grau, evidencia-se no enunciado a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva, no item a) se faz uso da tabela - Registro Multifuncional de representação não discursiva, fixando pontos para o número de consultadas realizadas. Nos itens d) e e), mostram-se situações de conversão entre dois registros de representação (Língua natural para a escrita algébrica - Registro Monofuncional de representação discursiva - e da escrita algébrica para a representação gráfica - Registro Multifuncional de representação não discursiva, respectivamente). Pode-se ver também que existe o caso de congruência no item b), quando se pede para fazer a conversão da Língua natural para a escrita algébrica, sendo que o enunciado traz todas as informações necessárias e em ordem para que isto ocorra já no item g) a resposta não é tão imediata, necessitando o aluno conjecturar qual o procedimento deverá utilizar, caracterizando assim um caso de não congruência. A transformação de tratamento pode ser observada nos item g) e h).

PLANO DE AULA II
Carga horária: 03 horas/aula
Tema
Variação dos parâmetros das funções afim e quadrática.
Objetivo(s)
➢ Determinar o que acontece com a função afim quando seus parâmetros a e b variam. ➢ Construir o gráfico da função afim utilizando intervalos. ➢ Interpretar a variação dos parâmetros da função afim. ➢ Analisar o comportamento da função antes e depois da raiz. ➢ Determinar o que acontece com a função quadrática quando seus parâmetros a, b e c variam. ➢ Construir o gráfico da função quadrática. ➢ Interpretar a variação dos parâmetros da função quadrática. ➢ Realizar uma forma de transformação de representação semiótica:

conversão.
Recursos Metodológicos
Caderno, lápis, caneta, lousa, marcador para quadro branco, folhas de registro impressas, computador.
Metodologia
Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Desenvolvimento

- **Atividade 01**

1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.

2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: Função afim no GeoGebra

Objetivo: Determinar o que acontece com a função afim quando seus parâmetros a e b variam.

Fonte da questão: Da pesquisa (2017).

Questão proposta: Na caixa de entrada do GeoGebra digite $f(x) = a * x + b$, e clique em criar controles deslizantes para a e b.

Mova o controle deslizante "a" tanto para direita quanto para e esquerda. Após, responda:

a) O que ocorre com o gráfico da função para valores negativos do parâmetro a?

b) O que ocorre com o gráfico da função para valores positivos do parâmetro a?

c) O que ocorre com o gráfico da função para o parâmetro $a = 0$?

d) Plote a função $f(x) = 2x - 5$ no GeoGebra, pode-se afirmar que:

( ) O gráfico é uma reta, pois a função é do 1ª grau.

( ) A função não corta o eixo x, desse modo não possui raiz real.

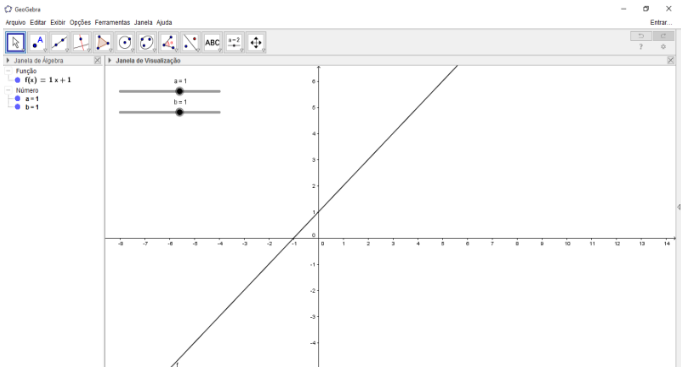
( ) A função intercepta o eixo y em (0,2).

( ) O ponto (-1,-3) pertence a função f.

( ) A função é positiva (tem imagem positiva) a partir de x = 2,5.

Solução esperada: Ao digitar na caixa de entrada do *software* GeoGebra $f(x) = a * x + b$, e ao criar controles deslizantes para a e b, estes parâmetros serão criados no intervalo de [-5, 5]. E será exibida na janela de visualização, a função quando $a = 1$ e $b = 1$, como mostra o Quadro abaixo:

Quadro 23 – Janela de visualização do *Software* GeoGebra.



Fonte: da pesquisa (2017).

a) Sendo o coeficiente angular “a” negativo significa que o seu ângulo de inclinação é do 2º quadrante, e seu gráfico será situado neste e no 4º quadrante, seu gráfico representará uma função decrescente.

b) Sendo o coeficiente angular “a” positivo significa que o seu ângulo de inclinação é do 1º quadrante, e seu gráfico será situado neste e no 3º quadrante, seu gráfico representará uma função crescente.

c) Quando se tem $a = 0$, tem-se um caso especial de função afim, a função constante, onde $f(x) = b$.

d) (x) O gráfico é uma reta, pois a função é do 1ª grau.

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: formalização acerca dos parâmetros da função afim, assim como o seu comportamento (positiva, negativa ou nula).

- **Atividade 02**

1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.
2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: A caixa d'água
Objetivo: Construir o gráfico da função afim utilizando intervalos. Interpretar a variação dos parâmetros da função afim. Realizar uma forma de transformação de representação semiótica: conversão.
Fonte da questão: SILVA (2013).
Questão proposta: Uma caixa d'água tem seu volume determinado pela função $y = ax + b$, com a, b ∈ R+, onde y representa o volume de água em função do tempo x em horas.
De acordo com essas informações, faça o que se pede em cada item a seguir:
a) Construa no ambiente dinâmico GeoGebra o gráfico dessa função, com $a = 2$ e b ∈ [0, 6].

b) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro b?

c) Qual é o significado do parâmetro $a = 2$?

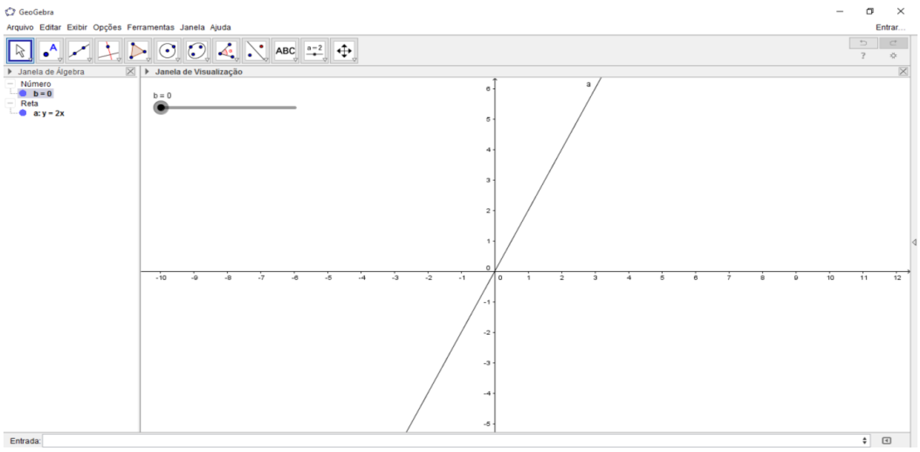
d) Construa no ambiente dinâmico GeoGebra o gráfico da função f, com a ∈ [0, 6] e $b = 0$.

e) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro a?

Solução Esperada:

a)

Quadro 24 - Gráfico dessa função $y = ax + b$, com $a = 2$ e $b \in [0, 6]$.



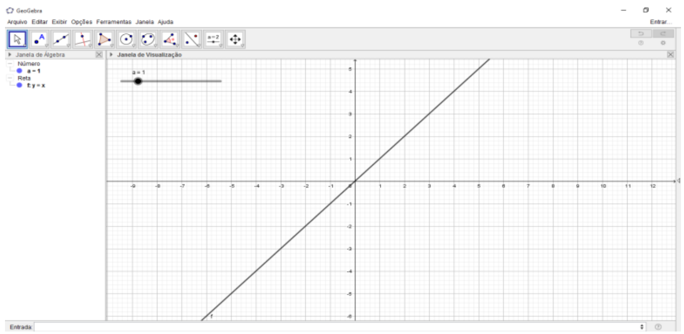
Fonte: da pesquisa (2017).

b) Neste caso, o parâmetro b diz respeito ao total de volume existente dentro da caixa d'água.

c) Neste caso, o parâmetro a diz respeito a vazão de água (2 litros por hora, por exemplo).

d)

Quadro 25 - Representação gráfica de $f(x) = x$.



Fonte: da pesquisa (2017).

e) Se variarmos o parâmetro a estamos variando a vazão de água em função do tempo.

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: formalização dos parâmetros da função afim.

- **Atividade 03**

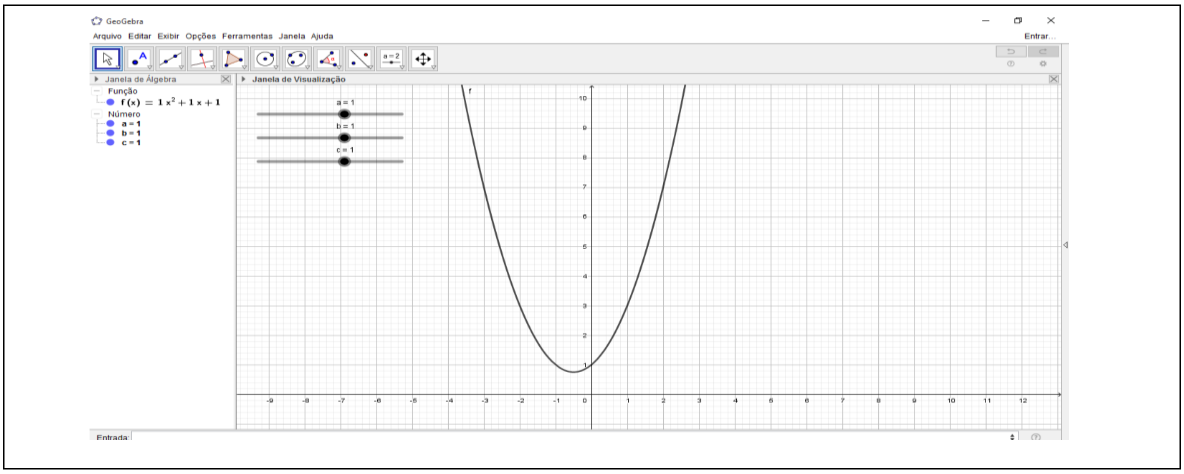
1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.
2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: Função Quadrática no GeoGebra
Objetivo: Determinar o que acontece com a função quadrática quando seus parâmetros a, b e c variam.
Fonte da questão: Da pesquisa (2017).
Questão proposta: Na caixa de entrada do GeoGebra digite $f(x) = a * x^2 + b * x + c$, e clique em criar controles deslizantes para a, b e c.
Mova o controle deslizante "a" tanto para direita quanto para e esquerda. Repita o processo com os outros parâmetros. Após, responda:
a) O que ocorre com o gráfico da função para valores negativos do parâmetro a?
b) O que ocorre com o gráfico da função para valores positivos do parâmetro c?
c) O que ocorre com o gráfico da função para o parâmetro $a = 0$?
d) O que ocorre com o gráfico da função quando se varia o parâmetro b?
e) Dada a função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, pode-se afirmar que:
( ) O gráfico é uma parábola, pois a função é do 1ª grau.
( ) A função não corta o eixo x, desse modo não possui raiz real.
( )O gráfico é uma reta, pois a função é do 2ª grau
( ) O gráfico é uma parábola com sua concavidade voltada para baixo, visto que o valor do parâmetro b é negativo.
( ) A função corta o eixo x, possuindo como raízes os números 2 e 5.

Solução Esperada:
Ao digitar na caixa de entrada do *software* GeoGebra $f(x) = a * x^2 + b * x + c$, e ao criar controles deslizantes para a, b e c, estes parâmetros serão criados no

intervalo de [-5, 5]. E será exibida na janela de visualização, a função quando $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, como mostra o Quadro abaixo:

Quadro 26 – Janela de visualização do *software* GeoGebra exibindo a $f(x) = a * x^\wedge 2 + b * x + c$



Fonte: da pesquisa (2017).

a) O gráfico possui concavidade voltada para baixo.

b) Tendo o parâmetro c positivo, o gráfico irá transladar em c unidades para cima.

c) Se a = 0, temos uma função polinomial de 1º grau e por consequência seu gráfico é uma reta.

d) O parâmetro b indica se a parábola intercepta o eixo dos y, no seu ramo crescente (b > 0), decrescente (b < 0) ou no vértice (b = 0). Assim sendo, quando se varia este parâmetro, podemos verificar em que ramo a parábola corta o eixo Oy.

e) (x) A função corta o eixo x, possuindo como raízes os números 2 e 5.

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: professor formaliza os parâmetros da função quadrática, e identifica os pontos das raízes da função (x_1,0) e (x_2,0)

- **Atividade 04**

1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.

2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: Lançamento de pedra

Objetivo: Construir o gráfico da função quadrática. Interpretar a variação dos parâmetros da função quadrática. Identificar que a função quadrática possui um extremo relativo. Realizar uma forma de transformação de representação semiótica: conversão.

Fonte da questão: Adaptada de SILVA (2013).

Questão proposta: Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de x segundos, atinge a altura y, dada por: $y = 8x - x^2$.

Utilizando o GeoGebra, realizar/resolver as seguintes atividades:

a) Construir o gráfico $y = f(x)$;

b) Qual a posição da pedra no instante 2s?

c) Qual(is) o(s) instante(s) em que a pedra passa posição 15m?

d) Determine a altura máxima que a pedra atinge. Existe relação entre o instante da altura máxima e o tempo que a pedra demora para chegar ao solo?

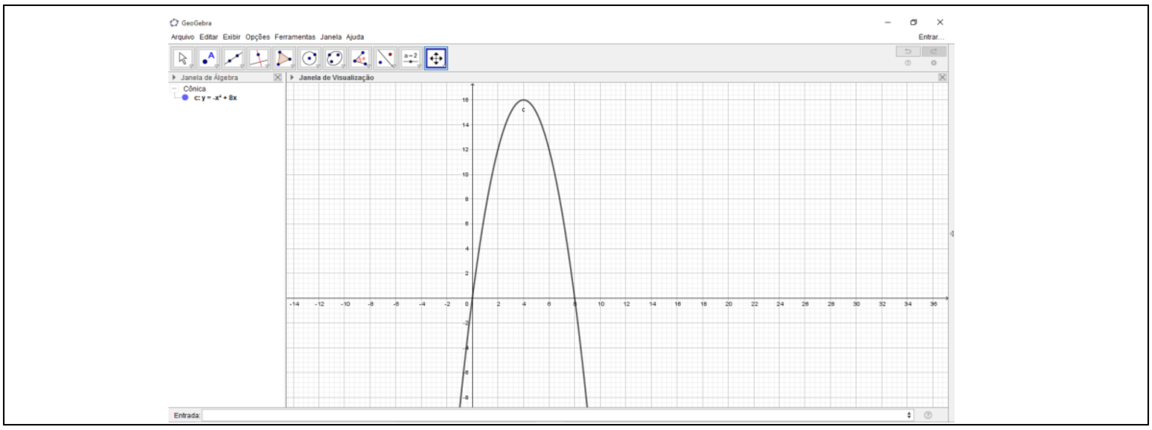
e) Quais são os possíveis valores para x? E quais são os valores possíveis para y?

f) Nessa situação, quanto vale o parâmetro c e o que ele indica?

Solução Esperada:

a)

Quadro 27 - Janela de visualização do *software* GeoGebra com o gráfico $y = f(x)$.



Fonte: da pesquisa (2017).

b) 12 m. c) 3 m (subindo) e 5 m (descendo). d) 16m (ponto de máximo). A relação existente é que o instante da altura máxima é a média entre os tempos que a pedra está no solo. e) O tempo só pode ser positivo, então varia de 0 até 8 segundos, neste caso. O mesmo para altura, todavia esta varia de 0 até 16 metros. f) O parâmetro c =0 indica que o gráfico não translada no eixo das coordenadas. 3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso. 4º momento: professor formaliza os parâmetros da função quadrática, assim como a existência de um ponto extremo (máximo ou mínimo) entre as raízes.
Avaliação
A avaliação será feita em consonância com a compreensão dos estudantes e as estratégias utilizadas pelos mesmos, assim serão observados quais conceitos os estudantes mobilizam para a resolução das atividades propostas. Também serão observados o interesse e participação na aula.
Referências
SILVA, L. G. **Variação de parâmetros em funções elementares utilizando o GeoGebra**. Dissertação de Mestrado. UFTM, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/handle/123456789/421. Acesso em 04 ago. 2017.

As atividades 01 e 02 fazem o estudo de funções polinomiais do 1º grau, evidencia-se nos enunciados de ambas a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva e a Língua formal (simbólica) - Registro Monofuncional de representação discursiva. Os enunciados de ambas também trazem um tipo de transformação: a conversão entre os registros supracitados e a Representação Gráfica – Registro Monofuncional de representação não discursiva, onde há congruência. Os item a), b), c), e d) da atividade 01, trabalham basicamente com a Língua Natural nos seus enunciados e nas suas soluções, sendo possível no GeoGebra observar a Representação Gráfica para responder as questões propostas. Os item a), b), c), d) e e) da atividade 02, também trabalham com a Língua Natural e a Representação Gráfica.

As atividades 03 e 04 fazem o estudo de funções polinomiais do 2º grau, evidencia-se nos enunciados de ambas a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva e a Língua formal (simbólica) - Registro Monofuncional de representação discursiva. Os item a), b), c), e d) da atividade 03, trabalham basicamente com a Língua Natural nos seus enunciados e nas suas soluções, sendo possível no GeoGebra observar a Representação Gráfica para responder as questões propostas. Os item a), b), c), d), e) f) da atividade 04, também trabalham com a Língua Natural e a Representação Gráfica. Sendo que os itens b), c), d) e e) apresentam um caso de não congruência.

PLANO DE AULA III
Carga horária: 02 horas/aula
Tema
Aplicação de função afim e quadrática.
Objetivo(s)
➢ Realizar uma conversão entre os registros de representação semiótica: tabular e algébrico; algébrico e gráfico; ➢ Identificar as grandezas envolvidas. ➢ Explorar a interpretação algébrica e gráfica da função quadrática.
Recursos Metodológicos
Caderno, lápis, caneta, lousa, marcador para quadro branco, folhas de registro impressas.
Metodologia
Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Desenvolvimento
1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto. 2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

- **Atividade 01**

Título: Promoção de camisetas
Objetivo: Realizar uma conversão entre os registros de representação semiótica: tabular e algébrico; algébrico e gráfico; Identificar as grandezas envolvidas.
Fonte da questão: Da pesquisa (2017)

Questão proposta: Uma determinada loja de roupas lançou uma promoção de camisetas. Observe o quadro abaixo sobre os valores das mesmas e responda as questões que seguem.

A	Quantidade de camisetas	2	5	10	18	25	33
B	Valor em reais	46	115	230	414		

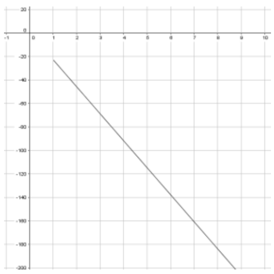
a) Você determina o valor unitário da camiseta? Explique seu pensamento.

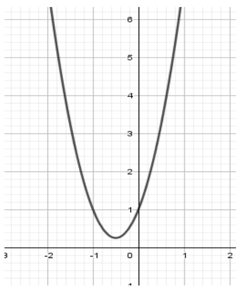
b) Complete no quadro o valor, em reais, faltante correspondente a quantidade de camisetas.

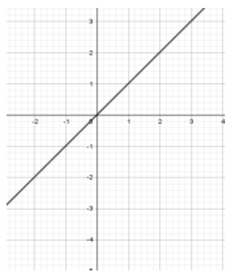
c) Conforme aumenta o número de calças aumenta o valor a ser pago. Isso define uma função? Explique com suas palavras o que deve ocorrer para termos um caso de função.

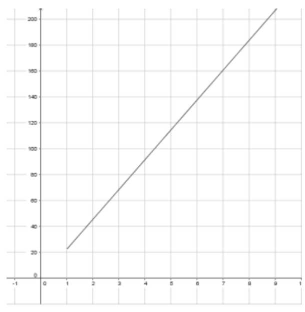
d) Nesta situação existe a relação entre duas variáveis, a dependente e a independente. Quais são todos os possíveis números para cada variável?

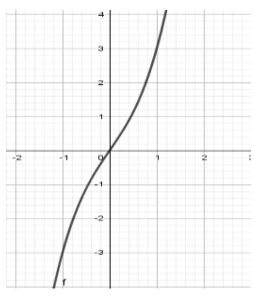
e) Observando os gráficos a seguir, identifique o que representa a tabela.

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

f) Existe uma proporcionalidade entre o número de camisetas vendidas e o valor a pagar? Qual a razão dessa proporcionalidade?

g) Maria tem uma filha que participa de um grupo de dança. Este grupo fará uma apresentação e precisa de 7 camisetas. Maria foi a esta loja, com sua amiga Roberta, e ao conferir a tabela, pensou em levar as camisetas que precisa, ao calcular o total que gastaria, chegou ao valor de 147 reais. Porém sua amiga disse que não, que gastaria 161 reais. Quem achou o valor correto, Maria ou Roberta?

Solução Esperada:

a) Sim, 23 reais.

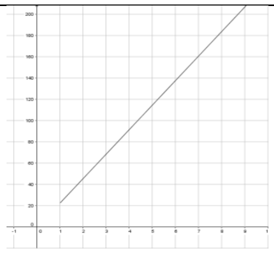
b)

A	Quantidade de camisetas	2	5	10	18	25	33
B	Valor em reais	46	115	230	414	575	759

c) O fato de aumentar o valor conforme aumenta a quantidade não define uma função. Para termos um caso de função, deve existir uma relação f de A em B onde todo elemento x pertencente a A tem um correspondente y pertencente a B, definido pela relação. E a cada x pertencente a A não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f.

d) O conjunto dos Naturais.

e)
Quadro 28 - Resposta do item e.



Fonte: da pesquisa (2017).

f) Sim. 1: 23

g) Roberta, visto que:
$f(7) = 23 \times 7$
$f(7) = 161\ reais$

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: professor formaliza função afim, seus registros de representação, tratamento e conversão, a determinação das variáveis e sua dependência, o cálculo da imagem.

- **Atividade 02**

1º momento: organização da turma em trios para explorarem as situações em conjunto.

2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos trios.

Título: Campo de futebol
Objetivo: Explorar a interpretação algébrica e gráfica da função quadrática.
Fonte da questão: Adaptada de Stewart (2002).

Questão proposta: Encontre as dimensões de um campo de futebol com perímetro de 100m cuja área seja maior possível.

a) Esboce o gráfico.
b) Para a área ser máxima, qual o valor das dimensões x e y?
c) Onde a função corta o eixo Oy?
d) Onde a função corta o eixo Ox?

Solução esperada:
Primeiramente deve-se ter a noção que o perímetro é $x + x + y + y = 100$
Enquanto a área é = $x.y$
Assim sendo,

$$2x + 2y = 100 \text{ (1)}$$
$$Área\ = x.y \text{ (2)}$$

Isolando y na primeira equação:

$$2x\ + 2y = 100$$
$$2y =\ 100 - 2x$$
$$y = 50 - x$$

Temos que $Área = x.y$ e $y = 50 - x$,logo: (substituindo y na equação da área)

$$Área =\ x.(50 - x)$$
$$Área =\ 50x\ -\ x^2$$

Determinando os pontos onde a função é nula y=0, (0,0) e (50,0), e determinando

a média entre as raízes, obtém-se que x = 25 é o ponto máximo da função.
Substituindo em (2):

$2 \,.\, (25) + 2y = 100$

$50 + 2y = 100$

$2y = 100 - 50$

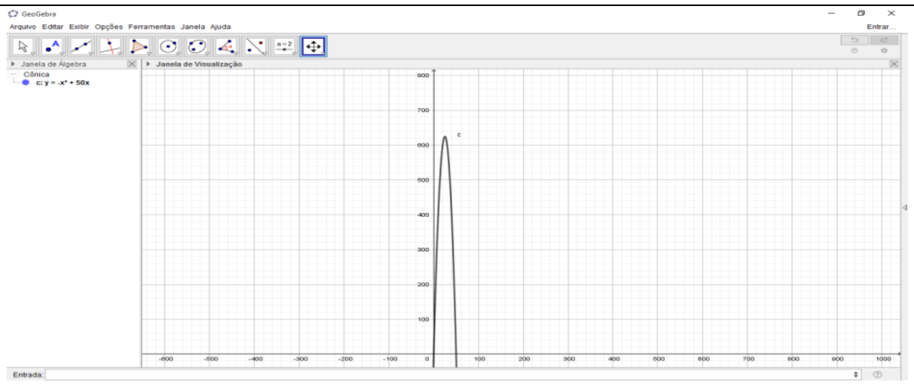
$y = 50/2$

$y = 25$

Portanto, $x = y = 25$ para a maior área, $A = 625$.

a)

Quadro 29 - Gráfico do item a (dimensões campo de futebol).



Fonte: da pesquisa (2017).

b) Valor de x = 25

Valor de y = 25

c) $y = 0$

d) Em $x = 0 \; e \; x = 50$

3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso.

4º momento: professor formaliza função quadrática, seus registros de representação, tratamento e conversão.

Avaliação

A avaliação será feita em consonância com a compreensão dos estudantes e as estratégias utilizadas pelos mesmos, assim serão observados quais conceitos os estudantes mobilizam para a resolução das atividades propostas. Também serão observados o interesse e participação na aula.

Referências

STEWART, James. **Cálculo**, volume I, 4a.edição. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

A atividade 01 faz o estudo de funções polinomiais do 1º grau, evidencia-se seu enunciado a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva e faz uso da tabela - Registro Multifuncional de representação não discursiva, para fixar pontos para o valor gasto em função do número de camisetas compradas. O item a) apresenta a transformação de conversão da Representação Tabelar para a Língua Natural. Enquanto o item b) trabalha a transformação de tratamento dentro de um mesmo registro (a tabela). Os itens c), d) e f) devem ser resolvidos utilizando a Língua Natural. O item e) trabalha com a Representação Gráfica - Registro Multifuncional de representação não discursiva. No item g) temos um caso de não congruência, que traz a transformação de tratamento.

A atividade 02 faz o estudo de funções polinomiais do 2º grau, evidencia-se seu enunciado a um caso de não congruência, contendo a Língua natural – Registro Multifuncional de representação discursiva. Antes de começar a responder os itens, o estudante deverá fazer a transformação de conversão da Língua Natural, para a Representação Algébrica - Registro Monofuncional de representação discursiva. Seguida, de alguns tratamentos. No item a) faz-se a conversão da Representação Algébrica para a Gráfica. Os itens b), c) e d), podem ser respondidos verificando-se a representação gráfica, também apresentando assim, a conversão, sendo esta da Representação Gráfica para a Língua Natural, todavia os estudantes podem não possuir uma ideia imediata de como respondê-las, representando assim um caso de não-congruência.

PLANO DE AULA IV
Carga horária: 02 horas/aula
Tema
Registros de Representação Semiótica da Função Afim e da Função Quadrática
Objetivo(s)
➢ Reconhecer os diferentes registros de representação semiótica da função afim e da função quadrática, percebendo que o objeto matemático é o mesmo.
Recursos Metodológicos
Caderno, lápis, caneta, lousa, marcador para quadro branco, folhas brancas.
Metodologia

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Desenvolvimento

1º momento: Os estudantes deverão estar dispostos em grupos, para cada grupo será entregue folhas brancas (ou cartolina), nas quais os estudantes deverão colocar os registros de representação semiótica do objeto matemático função, especialmente a função afim e a função quadrática.

Quadro 30 - Modelo Registros de Representação Semiótica (Função Afim).

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO - FUNÇÃO AFIM

Representação em Língua Natural

Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei de formação. $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b \in \mathbb{R}}$**.**

Representação Algébrica

$f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$

Representação Numérica

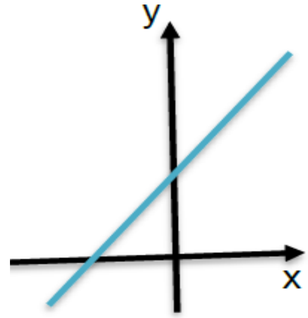
$f(x) = 2x + 5$

Registro Tabular

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	-9	(-2, -9)
-1	-4	(-1, -4)
1	6	(1, 6)
2		(2,)
3		(3,)

Representação Gráfica

$f(x) = 2x + 3$



Fonte: Duval (2008, p. 14) apud Neto et. al. (2016, p. 04)

O mesmo deverá ser feito para a função quadrática. Para tanto, para cada grupo será sorteado um problema dentre os descritos abaixo.

2º momento: o professor motiva seus estudantes quanto o estudo dos registros de representação de funções, lança a questão (situação-problema), discute com eles a interpretação da questão, acompanha a exploração dos grupos.

Questão proposta: Para cada situação-problema recebida seu grupo deverá, conforme o roteiro fornecido, escrever ao menos três registros de representação semiótica para a dada função (tabelar, numérico, gráfico, numérico, algébrico,...).

1. Para levar uma carga de caminhão dentro de um Estado, uma transportadora cobra R$ 10,00 fixos mais R$ 0,50 por quilo de carga. O preço do frete ($f(x)$) é função da massa em quilogramas (x) da carga. Construa uma tabela de valores para o transporte conforme o peso de carga (em quilos).

2. Em um retângulo, o comprimento é 5 cm. Nessas condições, construa uma tabela associando larguras ao perímetro do retângulo. Se x representa a largura, qual é a lei da função que expressa o perímetro nesse retângulo?

3. Três planos de telefonia celular são apresentados abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

4. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível, pois assim haveria mais espaço para a torcida fora da quadra.

5. A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determine:
a) em que instante a bola atinge a altura máxima;

b) a altura máxima atingida pela bola. 6. Um projétil da origem O (0,0), segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica que atinge sua altura máxima no ponto (2, 4). Escreva a equação dessa trajetória. 3º momento: professor anota os diferentes resultados dos trios no quadro, explora e discute os resultados, tira dúvidas, faz o consenso. 4º momento: formalização acerca dos registros de representação semiótica das funções afim e quadrática.
Avaliação
A avaliação será feita em consonância com a compreensão dos estudantes e as estratégias utilizadas pelos mesmos, assim serão observados quais conceitos os estudantes mobilizam para a resolução das atividades propostas. Também serão observados o interesse e participação na aula.
Referências
DANTE, L. R. **Matemática**: volume único. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

Com este último plano de aula, espera-se que os estudantes compreendam que apesar de possuir vários registros de representação, o objeto matemático estudado permanece o mesmo. Um registro pode facilitar a visualização de certas propriedades não tão evidentes em outros. As situações-problemas servem como um guia aos estudantes para estes mobilizarem e fazerem o reconhecimento dos registros (língua natural, tabular, numérico, gráfico,...) das funções afim e quadrática. Em alguns casos, será necessário os discentes resolverem alguns itens/questionamentos a fim de buscar outras representações.

A seguir, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao buscar responder a problematização deste trabalho – "Como uma sequência de ensino baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode auxiliar os estudantes do ensino médio na compreensão dos objetos funções afim e quadrática?" elaborou-se uma proposta de sequência de ensino composta por quatro planos de aulas, sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. O autor procura compreender, na relação do estudante com o objeto matemático, possíveis dificuldades de ordem cognitiva decorrente do processo de ensino e aprendizagem, visto que um mesmo objeto têm diferentes formas de registros de representação. Sendo assim, buscou-se nesta teoria, o referencial teórico necessário para construir a sequência de ensino para funções afim e quadrática, fazendo uso de múltiplos registros de representação semiótica em atividades contextualizadas para a compreensão e apreensão do objeto matemático função.

Importante destacar que procurou-se enfatizar esta diversidade de representações do mesmo objeto matemático na sequência de ensino, recorrendo-se a utilização destes diferentes registros, trabalhando não só o tratamento do mesmo objeto, bem como a conversão de registros (natural, algébrico, gráfico, entre outros). Buscou-se alguns recursos durante a elaboração desta sequência, escolhendo-se o *software* GeoGebra pelas potencialidades de visualização que o mesmo proporciona.

Considera-se assim, que a proposta de sequência de ensino baseada na teoria de Duval, utilizando das transformações de registros (tratamento e conversão) de maneira contextualizada pode potencializar a compreensão do objeto matemático funções, nesse caso, as funções afim e quadrática.

Espera-se que a sequência de ensino, sirva como subsídio aos docentes que almejam que seus estudantes coordenem diferentes registros de representação semiótica e estabeleçam relações entre esses, podendo assim extrair conclusões sobre funções polinomiais de primeiro e segundo grau.

Também se espera que com a futura aplicação desta sequência, seja possível observar evidências suficientes para identificar quais registros de representação apresentam melhores benefícios na compreensão conceitual do objeto matemático em questão, observando os tipos de transformações aplicados nestes, para assim poder trabalhar em concordância com os mesmos.

Por fim, ressalta-se que o presente estudo demandou tempo e conhecimento mais aprofundado, seja didático ou matemático. O desafio de desenvolver a compreensão do objeto função proposto aqui, revela o quanto o professor necessita de tempo (planejamento) para buscar relações convenientes/necessárias, situações contextualizadas e metodologias adequadas para cumprir sua missão de ensinar para construir um cidadão crítico, criativo e autônomo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. F. de. **Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da função afim com uso do *software* GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2013.

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**. 6ªed.v.1 Bookman: Porto Alegre, 2000.

ÁVILA, G., & ARAÚJO, L. C. **Cálculo**: ilustrado, prático e descomplicado. Rio de Janeiro: LTC, 2012

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado. Curitiba. 2006. Universidade Federal do Paraná.

BORBA, Marcelo de Carvalho. A Pesquisa Qualitativa Em Educação Matemática. Publicado em CD nos A**nais da 27ª reunião anual da Anped**, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno dá licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 63-76, Niterói, 2007. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume6/ UM_ BREVE_HISTÓRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNÇÃO.pdf>. Acesso em: 30 out. 2017.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria da Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CALDEIRA, A. M., SILVA, L. M., MACHADO, M. A., & MEDEIROS, V. Z. **Pré-cálculo** (2 ed.). São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática**: volume único. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

DEMANA, F., WAITS, B., FOLEY, G., & KENNEDY., D. **Pré-cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): fascículo I – São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2011.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 2ª ed. V.1. LTC: Rio de Janeiro. 1987.

IEZZI, G. **Matemática**: ciência e aplicação. 6ª edição. São Paulo: Saraiva 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 9ª Ed. São Paulo: Atual, 2005.

LENARTOVICZ, I. G. **Aplicação da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de Administração.** 2013. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2013.

MARIANI, R.C.P. **A transição da Educação Básica para o Ensino Superior:** A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo. Tese de doutorado, PUC/SP, 2006.

MARQUES, G. da C. Funções 2 *IN* **Fundamentos de Matemática I**. Univesp, 2014. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_02.pdf

MISKULIN, R. G. S.; MARTINS, M.C; MANTOAN,M.T.E. **Análise Microgenética dos Processos Cognitivos em Contextos Múltiplos de Resolução de Problemas**. Campinas: NIED NIED/UNICAMP, 1996, p 43.

MORETTIN, P. A., HAZZAN, S., & BUSSAB, W. D. **Cálculo**: funções de uma e várias variáveis (2 ed.). São Paulo: Saraiva, 2010.

NÉ, A. L. dos S. **A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

NETO, Z. C. A; SILVA, E. S.; FILHO, A. S. L. & COÊLHO, S. M. L. Os registros de representação semiótica: uma ferramenta no ensino de função afim trabalhado em uma escola pública em Santo Antônio dos Milagres/PI *IN* **III Congresso Nacional de Educação**. 2016

ONUCHIC, L. R & ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “Personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Revista Bolema**, ano 21, nº 31: p. 79 a102. Rio Claro-SP, 2008.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 2. ed. São Paulo: Brasiliense, 2004,86 p.

SANTANA, J. P. dos S. **A problematização por meio do GeoGebra**: uma proposta de atividades para o ensino de funções. Monografia (Graduação).Mari: UFPB/CCEN., 2011.44f.

SILVA, K. A. P. da e ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e Semiótica: algumas relações. In: **VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática**, 2009.

SILVA, L. G. **Variação de parâmetros em funções elementares utilizando o GeoGebra**. Dissertação de Mestrado. UFTM, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/handle/123456789/421. Acesso em 04 ago. 2017.

SOUZA, J. R. **Novo olhar**: matemática : 1. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. *IN*: I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana de Pedagogia da UEM: “**Infância e Práticas Educativas**”. Arq Mudi, 2007.

STEWART, J. **Cálculo**, volume I, 4ª edição. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

TRIVELATO, S. L. F.; OLIVEIRA, O. B. Práticas docente: o que pensam os professores de ciências biológicas em formação. Artigo apresentado no **XIII ENDIPE**. Rio de Janeiro, 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Folha de Registros Plano de aula I

Atividade I: O quadro abaixo representa a quantidade de calças vendidas de acordo com seu tamanho em uma determinada loja. Observe o quadro e responda:

A	Número de calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

Fonte: Braylin (2017)

a) A correspondência representa uma Função de *A* em *B*? Por quê?

b) A correspondência de *B* em *A* seria uma função? Por quê?

Atividade II: Uma pessoa vai escolher entre dois planos de saúde, A e B. As condições de cada plano são:

Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 180,00 e R$ 40,00 por consulta.

Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 120, 00 e R$ 50,00 por consulta.

a) Sabendo das informações apresentadas, preencha a tabela a seguir.

Plano A

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal					

Plano B

Nº de consultas por mês	1	2	3	5	10
Custo total mensal					

b) Para um cliente que utilize 4 consultas mensais, em média, qual seria o plano mais vantajoso financeiramente? Explique como você encontrou esta resposta.

c) Supondo agora que o número de consultas fosse alterado para 8 consultas mensais, o plano mais vantajoso continuaria sendo o mesmo? Justifique sua resposta.

d) Agora se não temos um número fixo de consultas no mês, determine uma expressão algébrica que poderia ser usada para calcular o valor do plano A e do plano B.

e) Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções referentes aos planos de saúde A e B.

f) Analisando o gráfico, responda. Em qual situação o plano A é mais econômico? Em qual situação o plano B é mais econômico? E quando os dois se equivalem?

g) Sabendo das funções que determinam o custo de cada um dos planos, como poderíamos determinar algebricamente o ponto de equilíbrio entre eles, ou seja, quando o custo é igual para ambos?

h) Sabendo a função que representa a situação, determinar qual seria o número de consultas feitas por um cliente se ele pagou pelo plano A R$ 540,00 em um determinado mês? E se pagou pelo plano B R$570,00? Apresente os cálculos/justificativas que você realizou para chegar a estas conclusões.

APÊNDICE B – Folha de Registros Plano de aula II

Atividade I: Na caixa de entrada do GeoGebra digite $f(x) = a * x + b$, e clique em criar controles deslizantes para a e b.

Mova o controle deslizante "a" tanto para direita quanto para e esquerda. Após, responda:

a) O que ocorre com o gráfico da função para valores negativos do parâmetro a?

b) O que ocorre com o gráfico da função para valores positivos do parâmetro a?

c) O que ocorre com o gráfico da função para o parâmetro $a = 0$?

d) Plote a função $f(x) = 2x - 5$ no GeoGebra, pode-se afirmar que:

( ) O gráfico é uma reta, pois a função é do 1ª grau.

( ) A função não corta o eixo x, desse modo não possui raiz real.

( ) A função intercepta o eixo y em (0,2).

( ) O ponto (-1,-3) pertence a função f.

( ) A função é positiva (tem imagem positiva) a partir de x = 2,5.

Atividade II: Uma caixa d'água tem seu volume determinado pela função $y = ax + b$, com a, b ∈ R+, onde y representa o volume de água em função do tempo x em horas.

De acordo com essas informações, faça o que se pede em cada item a seguir:

a) Construa no ambiente dinâmico GeoGebra o gráfico dessa função, com $a = 2$ e b ∈ [0, 6].

b) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro b?

c) Qual é o significado do parâmetro $a = 2$?

d) Construa no ambiente dinâmico GeoGebra o gráfico da função f, com a ∈ [0, 6] e $b = 0$.

e) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro a?

Atividade III: Na caixa de entrada do GeoGebra digite $f(x) = a * x^2 + b * x + c$, e clique em criar controles deslizantes para a, b e c.

Mova o controle deslizante “a” tanto para direita quanto para e esquerda. Repita o processo com os outros parâmetros. Após, responda:

a) O que ocorre com o gráfico da função para valores negativos do parâmetro a?

b) O que ocorre com o gráfico da função para valores positivos do parâmetro c?

c) O que ocorre com o gráfico da função para o parâmetro $a = 0$?

d) O que ocorre com o gráfico da função quando se varia o parâmetro b?

e) Dada a função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, pode-se afirmar que:

( ) O gráfico é uma parábola, pois a função é do 1ª grau.

( ) A função não corta o eixo x, desse modo não possui raiz real.

( )O gráfico é uma reta, pois a função é do 2ª grau

( ) O gráfico é uma parábola com sua concavidade voltada para baixo, visto que o valor do parâmetro b é negativo.

( ) A função corta o eixo x, possuindo como raízes os números 2 e 5.

Atividade IV: Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de x segundos, atinge a altura y, dada por: $y = 8x - x^2$.

Utilizando o GeoGebra, realizar/resolver as seguintes atividades:

a) Construir o gráfico $y = f(x)$;

b) Qual a posição da pedra no instante 2s?

c) Qual(is) o(s) instante(s) em que a pedra passa posição 15m?

d) Determine a altura máxima que a pedra atinge. Existe relação entre o instante da altura máxima e o tempo que a pedra demora para chegar ao solo?

e) Quais são os possíveis valores para x? E quais são os valores possíveis para y?

f) Nessa situação, quanto vale o parâmetro c e o que ele indica?

APÊNDICE C – Folha de Registros Plano de aula III

Atividade I: Uma determinada loja de roupas lançou uma promoção de camisetas. Observe o quadro abaixo sobre os valores das mesmas e responda as questões que seguem.

A	Quantidade de camisetas	2	5	10	18	25	33
B	Valor em reais	46	115	230	414		

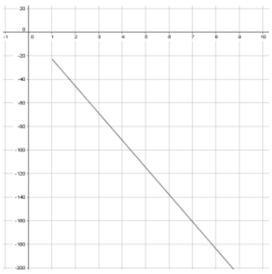
a) Você determina o valor unitário da camiseta? Explique seu pensamento.

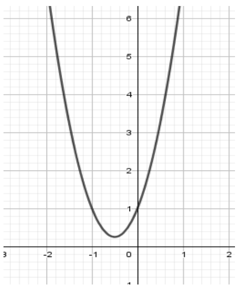
b) Complete no quadro o valor, em reais, faltante correspondente a quantidade de camisetas.

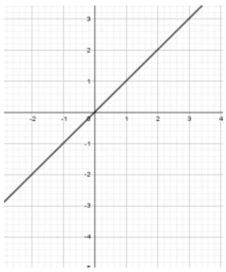
c) Conforme aumenta o número de calças aumenta o valor a ser pago. Isso define uma função? Explique com suas palavras o que deve ocorrer para termos um caso de função.

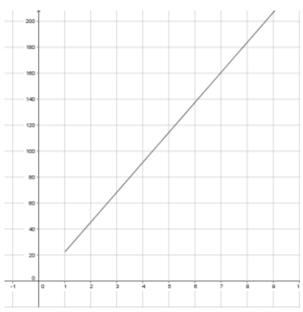
d) Nesta situação existe a relação entre duas variáveis, a dependente e a independente. Quais são todos os possíveis números para cada variável?

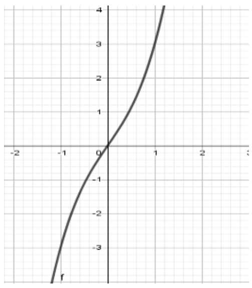
e) Observando os gráficos a seguir, identifique o que representa a tabela.

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

f) Existe uma proporcionalidade entre o número de camisetas vendidas e o valor a pagar? Qual a razão dessa proporcionalidade?

g) Maria tem uma filha que participa de um grupo de dança. Este grupo fará uma apresentação e precisa de 7 camisetas. Maria foi a esta loja, com sua amiga Roberta, e ao conferir a tabela, pensou em levar as camisetas que precisa, ao calcular o total que gastaria, chegou ao valor de 147 reais. Porém sua amiga disse que não, que gastaria 161 reais. Quem achou o valor correto, Maria ou Roberta?

Atividade II: Encontre as dimensões de um campo de futebol com perímetro de 100m cuja área seja maior possível.

a) Esboce o gráfico.
b) Para a área ser máxima, qual o valor das dimensões x e y?
c) Onde a função corta o eixo Oy?
d) Onde a função corta o eixo Ox?

APÊNDICE D - Folha de Registros Plano de aula IV

Atividade: Para cada situação-problema recebida seu grupo deverá, conforme o roteiro fornecido, escrever ao menos três registros de representação semiótica para a dada função (tabelar, numérico, gráfico, numérico, algébrico,...).

<table>
<tr><th colspan="2">REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO - FUNÇÃO ______________</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação em Língua Natural</td><td>Representação Algébrica</td></tr>
<tr><td>Representação Numérica</td></tr>
<tr><td>Registro Tabular</td><td>Representação Gráfica</td></tr>
</table>

Situações-problemas sugeridas:

1. Para levar uma carga de caminhão dentro de um Estado, uma transportadora cobra R$ 10,00 fixos mais R$ 0,50 por quilo de carga. O preço do frete ($f(x)$) é função da massa em quilogramas (x) da carga. Construa uma tabela de valores para o transporte conforme o peso de carga (em quilos).

2. Em um retângulo, o comprimento é 5 cm. Nessas condições, construa uma tabela associando larguras ao perímetro do retângulo. Se x representa a largura, qual é a lei da função que expressa o perímetro nesse retângulo?

3. Três planos de telefonia celular são apresentados abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

4. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível, pois assim haveria mais espaço para a torcida fora da quadra.

5. A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determine:
a) em que instante a bola atinge a altura máxima;
b) a altura máxima atingida pela bola.

6. Um projétil da origem O (0,0), segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica que atinge sua altura máxima no ponto (2, 4). Escreva a equação dessa trajetória.